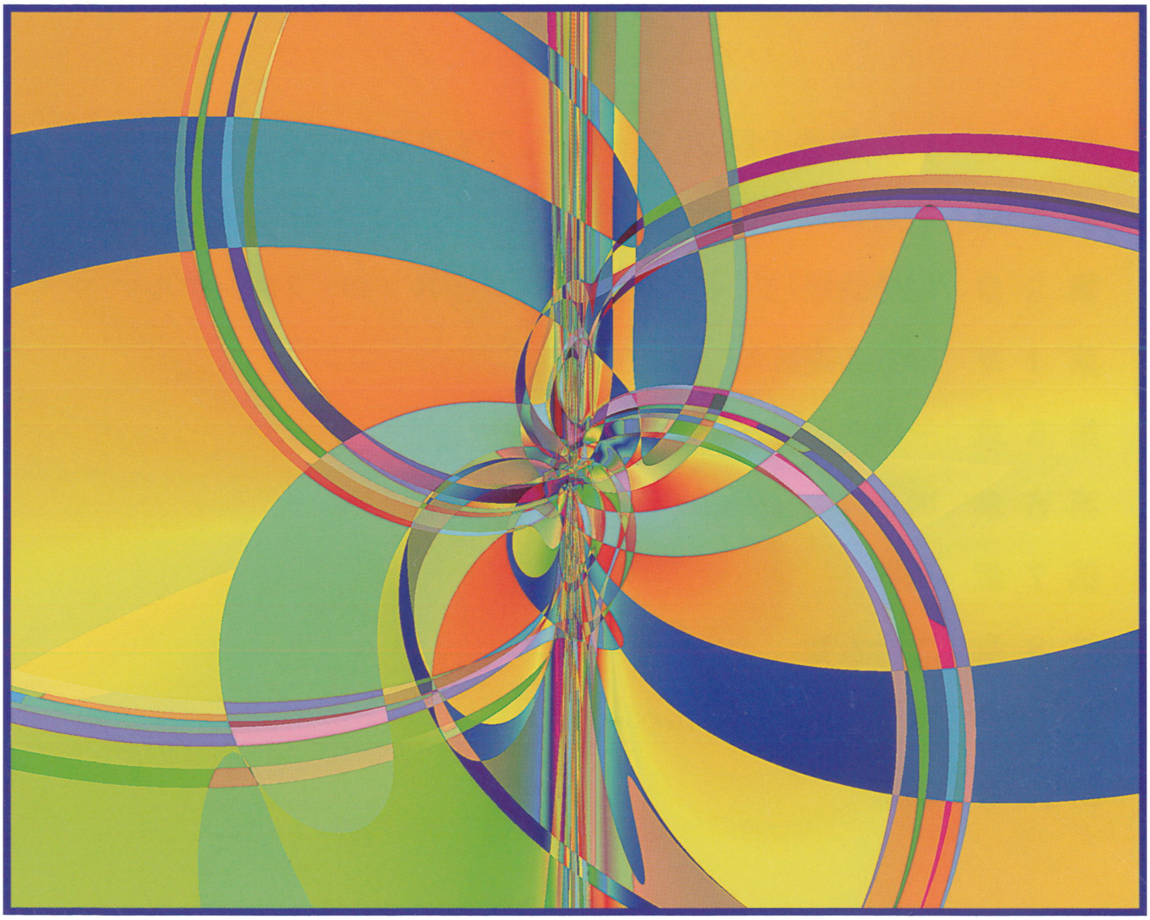
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2010年3月1日発行　第48巻3号　毎月1回1日発行

ISSN 0386—2240

数理科学

3
2010

特集　物理数学の効用
物理の具体例から入る数学抽象世界



No.561

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 561 March 2010

物理数学の効用

物理の具体例から入る数学抽象世界

表紙：戸川 隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．郵送料小社負担にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は 1 年間（本誌のみ）11,000 円，1 年間（本誌＋別冊 2 冊）14,500 円，半年間（本誌のみ）5,500 円，半年間（本誌＋別冊 1 冊）7,250 円です．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7〜2007 年/5 省略

2007 年/6 物理における位相の世界
/7 代数的物理観
/8 数学における場の量子論
/9 ディラック
/10 フーリエ解析の力
別冊 素粒子物理学の発展
/11〈電弱統一理論〉
/12「時空」への問いかけ
2008 年/1 現象を視る
/2 ゲージ重力対応
/3 現代物理のための数学キーワード
/4 現代数学はいかに使われているか［解析編］
別冊 多様体の広がり
/5 物理と数学の難所
/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力
/9 トポロジカルな弦の世界
/10 ポアンカレ
別冊 対称性と保存則
/11 物理と論理
/12 確率論的物理観
2009 年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊 代数学の魅力
/5 微積分を楽しむ
/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数
/9 シュレーディンガー
/10 数学と物理に広がる不変量
別冊 量子重力理論
/11 可積分系の世界
/12《原理》の探求
2010 年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化

数理科学臨時別冊一覧

08 年/5 重力理論講義
08 年/6 代数幾何入門講義
08 年/7 ネットワーク科学への招待
08 年/9 物理のためのリー群とリー代数
08 年/11 量子暗号理論の展開
09 年/1 量子力学の考え方
09 年/7 ゲージ理論の発展
09 年/9 量子コンピュータの基礎［第 2 版］
09 年/11 重点解説 基礎微分幾何
09 年/12 ε–δ 論法再入門
10 年/1 多彩な量子の世界

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
ブックファースト青葉台店（横浜）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）
ジュンク堂書店（盛岡）
ジュンク堂書店（新潟）
旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

——大学生協・売店——

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

March 2010 MATHEMATICAL SCIENCES Number 561

特集／物理数学の効用

巻頭言

佐々木 隆

物理数学とは名の通り，物理（自然）現象の解明のために作り上げられてきた数学的方法の総称であり，19 世紀までの数学の大部分を含み，現代数学の重要部分を構成している．従って，その理論の根元には，必ず豊富な具体例が存在する．それらの具体例を丹念に調べ学ぶことにより，そこから発展した抽象的数学概念や方法を，公理論的・演繹的な道筋よりも速やかにかつ深く理解できるだろうというのが今回の特集の趣旨である．変分法，ベクトル解析などから可積分系までの 10 の話題の具体例が丁寧に扱われている．じっくり読んで，根元の現象と発展としての種々の概念・方法との関係を理解していただきたい．

初学者はややもすると数学理論の華麗な構造に目を奪われがちであるが，その底にある具体例を常にしっかり把握することを勧めたい．「良い具体例のない抽象理論に惑わされるな！」というのが適切な助言だろう．数学の研究会に出席すると，講演の途中に『General Nonsense だ！』というヤジが入り，弁解と攻撃の応酬が続くことがある．一般化と壮大化が数学者の持つ典型的な性向であり，根本を見失ってしまうと，General Nonsense に陥ってしまう危険性を常に持っているのだろう．

良い数学の大部分は，具体的な問題を解決するという欲求から生まれたものであることを銘記しよう．そのための武器（方法）が泥臭いものであってもためらうことはない．良い例として，オイラー方程式を取り上げよう．変分法の教科書に載っているのはラグランジュによって完成した導出法（1760）である．オイラーは，関数 $y=f(x)$ を含む積分

$$J=\int_a^b F(x,y,y')dx,\quad y(a)=\alpha,\quad y(b)=\beta$$

が停留値を持つための必要条件を次のように導いた（1744）．区間 $[a,b]$ を等間隔の小部分，$x_0=a,x_1,\ldots,x_{n+1}=b$ に分けて，曲線 $y=f(x)$ を折れ線 $y_s=f(x_s)$, $y'_s=(y_{s+1}-y_s)/(x_{s+1}-x_s)$ で近似して，上の積分を有限和

$$S'=\sum_{s=0}^{n}F(x_s,y_{s+1},y'_s)\Delta x,\ \Delta x=x_{s+1}-x_s$$

におきかえた．これは y_s だけの関数なので，その偏微分がすべて零になることが必要である：

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]_{x=x_s}=0,\quad (s=0,1,\ldots,n+1).$$

極限 $\Delta x\to 0$ を取って，オイラー方程式

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0,\quad a\le x\le b.$$

を得る．

最後に元気づけられる一言．研究所の一隅にアインシュタインのポスターが掛かっている．そこにある言葉：“Do not worry about your difficulties in mathematics; I can assure you that mine are still greater.” 自然現象に根ざしていれば，それ故に泥臭くとも，純粋思惟の産物よりも偉大なものができることがあるという宣言であろう．

（ささき・りゅう，京都大学基礎物理学研究所）

変分原理と物理法則

窪田　高弘

1. 最古（？）の変分問題

Courant–Hilbert の物理数学の教科書[1)]の片隅に, **Dido の問題**というのが述べられている．Dido とはカルタゴの開祖とされる神話の中の女性である．Dido はカルタゴ建設の際，牛の皮 1 枚で覆える土地を譲ってもらうという了承を原住民から取り付けた．そして「それでは」と言って，牛の皮を細く切って長い紐を作り，その紐で肥沃な土地を囲んで占有したという．これは変分学の始まりのようなお話である．

土地の肥沃度が $\rho(x,y)$ という 2 次元平面上の関数で表されるとしよう．領域 D での積分

$$\int_D dxdy\ \rho(x,y) \tag{1}$$

が最大になるように D の形を決めよ，というのが Dido の問題である．但し領域 D の周辺の長さは一定の値であるとする．肥沃度が一定の場合は,「周囲の長さが一定の値の図形で，面積が最大になるものは何か」という問題になる．これはしばしば**等周問題**と呼ばれる．

積分 (1) は，領域 D の形に依存する．領域 D の形を指定する関数の関数と言ってもよい．このような関数の関数のことを汎関数と呼ぶ．一般に，汎関数の極大極小を論ずる学問が変分学であり，この稿の主テーマである．

2. 最速降下線

変分学と無関係ではない身近な例を一つ挙げよう．日本の寺や神社の屋根は美しい曲線を描いているが，この屋根の形は，雨が降った時に雨粒が最速で屋根の先端に到達できる曲線（最速降下線）に近い（図 1）．

雨粒に対する摩擦は無視できるとしよう．雨粒の質量を m，重力加速度を g とすると，高さ y の位置における雨粒の速さ v は，エネルギー保存則の式，$mv^2/2 + mgy = E$ を満たさなければならない．ここで E は定数である．従って v は $v = \sqrt{2(E - mgy)/m}$ となる．雨粒が A から B まで移動するのに要する時間 T は

$$T = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{v}$$
$$= \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \sqrt{\frac{m}{2(E - mgy)}}$$

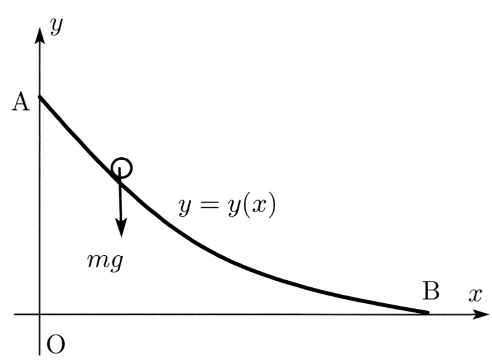


図 1　屋根を流れ落ちる雨粒．

で与えられる．A と B を結ぶ最速降下線を $y = y(x)$ とする．この曲線を $y(x) \longrightarrow y(x) + \delta y(x)$ と，微小に変化させたとき，T の値が変化しないという停留値の条件，$\delta T = 0$ が最速降下線の満たすべき条件である．詳しい計算はここでは省略するが，サイクロイド曲線が最速降下線となる．

本質的にこれと同じ問題は，1697 年に Johann Bernoulli がヨーロッパの数学者に対して提出した．Newton はこの問題を変分法を用いて直ちに解き，匿名で解答を送った．その解法を見た Bernoulli は，解答者が Newton であることをすぐに見抜いたという[2]．

3. 幾何光学における光路

中学や高校で幾何光学を学ぶと，光の屈折に関する **Snell の法則**というのを習う．実はこの法則も変分学と密接な関係にある．図 2 のように，点 A から点 B まで光が進む際，光は最短時間で到達するように光路を選ぶ．これを **Fermat の原理**と言う．PQ の上側および下側の媒質の屈折率を，それぞれ n_1, n_2 とする．真空中での光の速さを c とすれば，屈折率 n の媒質中での光の速さは c/n であるから，図 2 の場合に Fermat の原理を適用すれば，

$$\frac{n_1}{c}\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\cos\theta_1} + \frac{n_2}{c}\frac{\overline{\mathrm{BQ}}}{\cos\theta_2} \tag{2}$$

が最小になるように光の経路が決まる．

θ_1, θ_2 は

$$\overline{\mathrm{AP}}\tan\theta_1 + \overline{\mathrm{BQ}}\tan\theta_2 - \overline{\mathrm{PQ}} = 0 \tag{3}$$

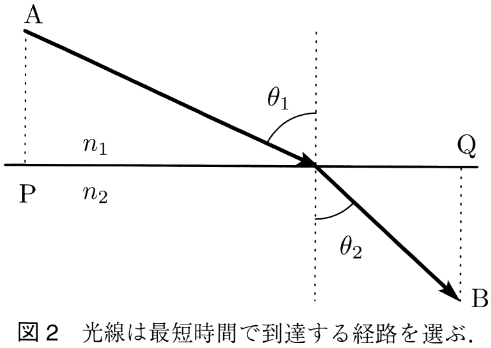


図 2　光線は最短時間で到達する経路を選ぶ．

という拘束条件が付いているので，Lagrange の未定乗数を λ として (3) の左辺に λ を掛け，(2) と足し算したものを θ_1, θ_2 で微分し，それぞれをゼロと置けば

$$\overline{\mathrm{AP}}\left(\frac{n_1}{c}\frac{\sin\theta_1}{\cos^2\theta_1} + \lambda\frac{1}{\cos^2\theta_1}\right) = 0,$$
$$\overline{\mathrm{BQ}}\left(\frac{n_2}{c}\frac{\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2} + \lambda\frac{1}{\cos^2\theta_2}\right) = 0$$

を得る．すなわち $n_1\sin\theta_1 + c\lambda = n_2\sin\theta_2 + c\lambda = 0$ となる．これにより

$$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2 \tag{4}$$

という Snell の法則が得られる．

屈折率が，$n = n(\boldsymbol{r})$ のように，座標 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ に関して連続的に変化する一般的な場合，点 A から点 B に到達する光に対する Fermat の原理は

$$\delta S = 0, \quad S \equiv \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} ds\; n(\boldsymbol{r}) \tag{5}$$

と書くことができる．ここで $ds^2 = (d\boldsymbol{r})^2$ である．経路を記述するパラメータを τ としよう．光の経路を，$\boldsymbol{r}(\tau)$ から $\boldsymbol{r}(\tau) + \delta\boldsymbol{r}(\tau)$ に微小変化させたとき，(5) の変化 δS は

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} d\tau \left(\frac{ds}{d\tau}\boldsymbol{\nabla} n\cdot\delta\boldsymbol{r} + n\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^{-1}\frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau}\cdot\frac{d\delta\boldsymbol{r}}{d\tau}\right)\\ &= \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} d\tau \left(\frac{ds}{d\tau}\boldsymbol{\nabla} n - \frac{d}{d\tau}\left(n\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^{-1}\frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau}\right)\right)\cdot\delta\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

となる．最後の式を得る際には，τ についての部分積分を行い，両端 A, B では $\delta\boldsymbol{r}$ がゼロであるとしている．停留値の条件 $\delta S = 0$ から光の経路が求まる．特に $\tau = s$ のときは

$$\boldsymbol{\nabla} n = \frac{d}{ds}\left(n\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right) \tag{6}$$

となる．これは Snell の法則 (4) の一般化と見なせる．実際，屈折率 $n(\boldsymbol{r})$ が，例えば z のみに依存する場合，(6) の右辺の x 成分，y 成分はゼロとなり，

$$n\frac{dx}{ds} = \text{constant}, \quad n\frac{dy}{ds} = \text{constant}$$

となるが，これは (4) の一般化と言える．

4. 一般相対性理論における運動の法則

ユークリッド空間内の 2 点を結ぶ最短の経路は明らかに直線であるが，Riemann 空間の場合の最短経路は**測地線**と呼ばれ，やや複雑なものとなる．Riemann 空間の距離は，計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ を用いて $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$ と書ける（ここで μ, ν についての和の記号は省略している）．

2 点 A, B を結ぶ曲線を記述するパラメータを τ とする．2 点間の距離は

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} ds = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} d\tau \sqrt{g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}} \qquad (7)$$

で与えられる．この距離を最小にする曲線が測地線である．測地線の満たすべき方程式は，(7) の変分をゼロにするという条件から求まる．計算の詳細は省略するが，測地線方程式は

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\lambda\rho}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \qquad (8)$$

というものである．ここで $\Gamma^\mu_{\lambda\rho}$ は接続係数と呼ばれるものである．

Einstein の一般相対性理論では，重力は空間の曲がり具合で表現され，質点はその時空の中の測地線に沿って運動する．すなわち (8) が質点の運動方程式となる．(7) に定数を掛けたものが質点の作用となり，作用を変分した結果，運動方程式 (8) が得られる．

5. 紐の運動

4 節では質点の運動を述べたが，今度は 1 次元的に伸びた紐を考えよう．図 3 のように紐 AA′ がある時間ののちに BB′ に移動したとする．1 次元的に広がった物体が移動するのであるから，軌跡は 2 次元面となる．そこでこの 2 次元面の面積を最小にするという問題を考えよう．これも変分問題の一つである．

2 次元面を記述するパラメータとして，(σ^1, σ^2)

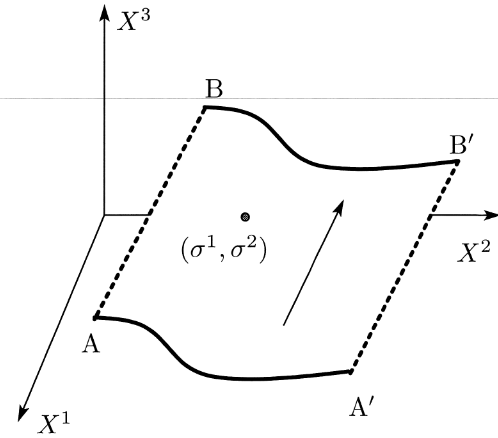


図 3　紐 AA′ が BB′ の位置まで運動すると，2 次元面が描かれる．

という座標を導入する．この 2 次元曲面の上での線素は

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma^a}\frac{\partial X^\nu}{\partial\sigma^b}d\sigma^a d\sigma^b$$

で与えられる．ここで $\eta_{\mu\nu}$ は Minkowski 計量である．2 次元面の面積は

$$\iint d\sigma^1 d\sigma^2 \sqrt{-\det\left(\eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma^a}\frac{\partial X^\nu}{\partial\sigma^b}\right)} \qquad (9)$$

となる．この積分が停留値をとるという条件から，$X^\mu(\sigma^1, \sigma^2)$ の満たすべき方程式が求まる．これが紐の運動方程式にほかならない．この直感的，幾何学的な描像が，弦理論あるいは紐理論と呼ばれる長編かつ壮大な物語の始まりであった．(9) にある定数を掛けたものは，紐に対する**南部・後藤の作用**と呼ばれている．

6. 力学の法則と変分原理

古典力学の変分原理による定式化について述べよう．質点の位置座標等々を表す力学変数を q_i と書く．添え字 i は変数の番号を表し，$i = 1, \cdots, n$ とする．q_i は時間 t の関数であり，運動エネルギーの総和 T は一般には q_i の時間微分 $\dot{q}_i$ によって表される．ポテンシャルエネルギーを $V(q_i)$ と表せば，$T - V$ のことを Lagrange 関数と呼んで $L(q_i, \dot{q}_i)$ と書く．Lagrange 関数を時刻 t_1 から時刻 t_2 まで積分した量

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i)$$

は作用と呼ばれる．

力学の法則は，力学変数 q_i を $q_i + \delta q_i$ に微小変化させたときに $\delta S = 0$ であるという要請，**Hamilton の原理**として定式化できる．ただし積分の両端での微小変化は $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ とする．実際，δS を計算してみると

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i\end{aligned}$$

となり，q_i に対する運動方程式として

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

を得る．これが **Euler–Lagrange 方程式**である．

Hamilton の原理に似ているがやや異なる力学の定式化として **Maupertuis の原理**というものがある．この原理では，エネルギー保存則を満たす運動のみを考え，終点を通る時刻は勝手であるとする．そのような運動の中で，作用を極小にする運動が実現されると主張する．

7. 正準方程式

q_i の正準共役運動量を $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ で定義する．Euler–Lagrange 方程式より $\dot{p}_i = \partial L / \partial q_i$ であることに注意して Lagrange 関数の微分を次のように変形してみる．

$$\begin{aligned}dL &= \sum_i (\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i) \\ &= d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i\right) - \sum_i (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i). \quad (10)\end{aligned}$$

この式にヒントを得て Hamilton 関数を

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad (11)$$

によって定義するならば，(10) は

$$dH = \sum_i (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i)$$

と書くことができる．すなわち

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \cdots, n)$$

という微分方程式が導かれる．これが **Hamilton の正準方程式**である．H は q_i および p_i の関数であり，(11) は変数 $(q_i, \dot{q}_j)$ を (q_i, p_j) に変換する **Legendre 変換**になっている．Euler–Lagrange 方程式が時間について 2 階微分を含む，n 個の微分方程式であったのに対して，Hamilton の正準方程式は，時間について 1 階微分の，$2n$ 個の方程式であることに注意しよう．

8. Jacobi の積分法

Hamilton の原理は

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i dq_i - H dt \right) = 0$$

と書くことができる．このことに注意しつつ，力学変数 (q_i, p_j) を新しい変数の組 (Q_i, P_j) に変換することを考えよう．(Q_i, P_j) を用いた場合にも同じ形の正準方程式が成り立つためには

$$\sum_i p_i dq_i - H dt = \sum_i P_i dQ_i - H' dt + dF$$

という関係式が成り立たなければならない．ここで $F = F(q_1, \cdots, q_n, Q_1, \cdots, Q_n, t)$ という関数は

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

を満たす必要がある．

独立変数の組として，$(q_1, \cdots, q_n, Q_1, \cdots, Q_n, t)$ ではなくて $(q_1, \cdots, q_n, P_1, \cdots, P_n, t)$ を用い，$\Phi = F + \sum_i P_i Q_i$ という Legendre 変換を行えば

$$d\Phi = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i + \sum_{i=1}^{n} Q_i dP_i + (H' - H) dt$$

を得る．ここで $\Phi = \Phi(q_1, \cdots, q_n, P_1, \cdots, P_n, t)$ である．この式から

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}, \quad (12)$$

$$H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{13}$$

が得られる．

さて，新しい変数 (Q_i, P_j) の場合の Hamilton 関数 H' がゼロであること，すなわち (13) より

$$H\left(q_1, \cdots, q_n, \frac{\partial \Phi}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial \Phi}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

を要請したとする．これを**Hamilton–Jacobi 方程式**と呼ぶ．(Q_i, P_j) に対する正準方程式により，Q_i, P_i はともに時間に依存しない定数となる．その定数を $P_i = \alpha_i$, $Q_i = \beta_i$ としよう．(12) の第 2 式により

$$\beta_i = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \Phi(q_1, \cdots, q_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, t)$$

が成り立つ．これを $q_1, \cdots, q_n$ について解けば運動方程式の解 $q_i(t)$ が求まったことになり，(12) の第 1 式より $p_i(t)$ も求まる．α_i, β_i が積分定数である．正準方程式という $2n$ 個の連立微分方程式を解く問題は，Hamilton–Jacobi 方程式という 1 個の偏微分方程式を解いて，Φ という多変数の関数を求める問題に集約される．

いろいろな初期条件に対する正準方程式の解は，$2n$ 次元空間 $(q_1(t), \cdots, q_n(t), p_1(t), \cdots, p_n(t))$ の中の「流れ」のように見える．その流れが止まって見えるような変数を見つけるのが Hamilton–Jacobi の方法である．

9. 静電場の理論と変分原理

電磁気学の法則も力学と同様に，変分原理を用いて定式化することができる．一例として，静電場の場合の Thomson（Kelvin 卿）の研究[3] について述べておこう．静電場の理論の基礎は，静電ポテンシャル $\phi(x, y, z)$ の満たす方程式を与えることにあるが，Thomson は，電場のエネルギーそのものを用いて理論の基礎を与えようとした．

境界面 S で囲まれた領域における電場を $\boldsymbol{E}$ とする．静電ポテンシャル ϕ は電場と $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$ という関係で結ばれているので，電荷が存在しない領域での Gauss の法則 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0$ により，そのような領域では，Laplace 方程式

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \tag{14}$$

が成り立つ．真空の誘電率を ε_0 とすれば，電場のエネルギーは体積積分

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \int dV \boldsymbol{E}^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \int dV (\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 \tag{15}$$

で与えられる．

与えられた境界条件の下で，Laplace 方程式 (14) を解くという問題を考える．解 ϕ は境界面 S では，ある決められた値を取るとする．関数 ψ は，境界面 S の上では ϕ と同じ値を取るが，必ずしも (14) を満たすとは限らない関数とする．このとき，次の恒等式に注意する．

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon_0}{2} \int dV \{(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 - (\boldsymbol{\nabla}\psi)^2\} \\
&= \varepsilon_0 \int dV \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \boldsymbol{\nabla}(\phi - \psi) \\
&\quad - \frac{\varepsilon_0}{2} \int dV \{\boldsymbol{\nabla}(\phi - \psi)\}^2 \\
&= -\varepsilon_0 \int dV \nabla^2 \phi (\phi - \psi) \\
&\quad + \varepsilon_0 \int_S d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi (\phi - \psi) \\
&\quad - \frac{\varepsilon_0}{2} \int dV \{\boldsymbol{\nabla}(\phi - \psi)\}^2 \\
&= -\frac{\varepsilon_0}{2} \int dV \{\boldsymbol{\nabla}(\phi - \psi)\}^2.
\end{aligned} \tag{16}$$

(16) を得る際には，方程式 $\nabla^2 \phi = 0$，ならびに境界 S においては $\phi = \psi$ であることを用いた．(16) は明らかに負またはゼロである．従って我々は「境界面で決められた値を取る関数のうちで，Laplace 方程式 (14) を満たすものが，エネルギー積分 (15) を最小にする」と主張することができる．これが**Thomson の定理**であり，変分原理を用いた静電場理論の定式化である．

このような変分原理の使い方は，量子力学でもしばしば用いられる．例えばヘリウム原子のエネルギー準位を求めたいとする．本来は Schrödinger 方程式を解くべきなのだが，実際に Schrödinger 方程式の厳密解は求まらない．そのような場合で

もエネルギー演算子の期待値の最低値を求めれば，少なくとも基底状態のエネルギーは精度良く求まる．**Ritz の方法**というのは，そのような偏微分方程式の近似的な解法を与える[4)]．

10. Dirichlet 原理

Riemann は Thomson の考え方を 2 次元の場合に応用し，任意の閉 Riemann 面上で，与えられた特異点を持つ調和関数の存在を証明しようとした．すなわち，与えられた条件の下で偏微分方程式

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$$

を解くという問題を，同じ条件の下で積分

$$\iint_D dxdy\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right\} \qquad (17)$$

を最小にするという変分問題に置き換えた．Riemann は，このような形での変分原理を **Dirichlet 原理**と呼び，以後この名称が定着した．Riemann の原論文は，最近は日本語で読むことができる[5)]．

ところで Riemann は，所与の条件の下で (17) の積分を最小にする微分可能な関数 ϕ が一意に存在することを，暗黙のうちに仮定していたが，この点が後に Weierstrass によって疑問視された．Weierstrass が指摘した変分法特有の困難を感覚的に理解するために，次の問題を考えてみよう．図 4 のように x 軸上の 2 点 A, B を結ぶ滑らかな曲線を考える．この曲線は 2 点 A, B で x 軸と直交するものとする．このような曲線のうちで長さが最小になるものを求めよ，というのが問題である．曲線の長さの下限は明らかに $\overline{\mathrm{AB}}$ である．そして長さが $\overline{\mathrm{AB}}$ にいくらでも近づく曲線は作れる．下限値は存在してもそれが最小値とは限らないのだ．

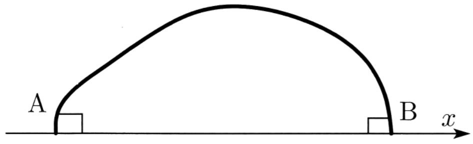


図 4　x 軸上の 2 点 A, B を結ぶ滑らかな曲線で，A, B で x 軸と直交する曲線のうち，距離が最小となるものは存在するか？

次の事実も教訓的だ．半径 1 の円周上で $\phi=0$ という境界条件が与えられたときに，円内での積分 (17) を最小にする関数を求めたいとする．単位円内の全領域で $\phi(x,y)=0$ という関数が所望のものであることは明らかだ．ところが Courant–Hilbert の教科書によれば，ある関数列 $\{\phi_n(x,y)\}$ が構成でき，対応する (17) の数列はゼロに収束するのに，関数列 $\{\phi_n(x,y)\}$ は $\phi(x,y)=0$ に収束しないものが存在するというのだ．このような具体例の存在により，19 世紀後半には，Dirichlet 原理は再検討を余儀なくされることとなった．

Weierstrass の指摘以降の紆余曲折については Klein[6)] の本に詳しい．Riemann の精神を生かす形での Dirichlet 原理の復活は Hilbert によって達成され，さらに Courant, Weyl[7)]，イタリアの数学者たちによって簡単化，一般化された．Courant–Hilbert の教科書の旧版[8)]では，最終章において Dirichlet 原理が詳しく議論されている．そこでは許容される関数の集合として，ある種のノルムに関して完備化された関数空間を採用する．そういう関数空間の中で (17) の値が最小値に収束する関数の列を構成すれば良い．このやり方で Dirichlet 原理を正当化できることが示されている．これは偏微分方程式の境界値問題における，Hilbert 空間論的な取扱いの先駆けだったと言える．

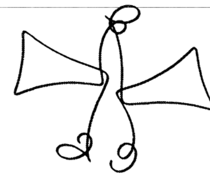
参考文献

1) R. Courant und D. Hilbert,『数理物理学の方法 1–4』(斎藤利弥監訳，東京図書，1959)．
2) S. Chandrasekhar,『チャンドラセカールの『プリンキピア』講義』(中村誠太郎監訳，講談社，1998)．
3) J.C. Maxwell, “A Treatise on Electricity and Magnetism” (Clarendon Press, 1891).
4) 寺沢寛一編,『数学概論（応用編）』(岩波書店，1960)．
5) B. Riemann,『リーマン論文集』(足立恒雄，杉浦光夫，長岡亮介編訳，朝倉書店，2004)．
6) F. Klein,『クライン：19 世紀の数学』(彌永昌吉監修，共立出版，1995)．
7) H. Weyl,『リーマン面』(田村二郎訳，岩波書店，1974)．
8) 参考文献 1) は旧版（ドイツ語版）の日本語訳で，新版（英語版）では大幅な書き換えが行われている．

（くぼた・たかひろ，
大阪大学大学教育実践センター，大阪大学大学院理学研究科）

ベクトル解析と場

ベクトル，微分形式，位相不変量（電磁気学，場の理論）



綿 村　哲

1. ベクトル解析と物理

大学の物理の授業では，ベクトル解析を理解するのが最初の目標とも言える．ニュートンの方程式はベクトル方程式だから，それを理解するにはこれは不可欠だ．現代の理論物理でもベクトル解析は基本であり，場の理論においては，さらに高度な数学的概念への懸け橋となる．現代物理を理解するには，そのような数学的概念を物理の法則と対応させ的確に理解する必要がある．ここでは，ベクトル解析とその場の理論への応用に的を絞って，物理と数学の関係を見ていこう．

2. 勾配，回転，発散

まず，ベクトル解析に現れる 3 つの基本的概念，場の勾配，回転，発散をそれぞれ思い出しておこう．

ある道 C に沿って空間のある点 $\boldsymbol{x}$ に至る物体の運動の仕事は力 $\boldsymbol{F}$ の線積分

$$\phi = \int_C^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x}' \tag{1}$$

で与えられる．そこで，仕事を微分すれば力が得られる．ところが，仕事は一般に道 C によるので，道を指定しなければ力が決まらない．つまり，仕事が位置のみの関数になり，その単なる微分として力を与えられるのは，仕事が道によらない場合に限られる．このとき，$U = -\phi$ が位置エネルギーになる．これがいわゆる保存力の場合で，力は**勾配**

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U \tag{2}$$

によって与えられる．

一方，道 C が閉じた経路のとき ϕ は**循環**と呼ばれる．保存力のように道 C によらないならば，この循環 $\phi(C)$ は 0 になるが，逆にこの循環が 0 でなければ何を意味するのか？ これは，次の流体の場合を考えるとよく分かる．

流体，例えば風の速度分布をベクトル場 $\boldsymbol{v}(x)$ で与える[*1]．すると，その循環は

$$\phi(C) = \oint_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x} \tag{3}$$

で，道 C の接線方向の速度成分の和をとったものだ．だから $\phi(C) \neq 0$ ならば流体が渦を巻いていることになる．ここで，C が z 軸に垂直で $(x, y, 0)$ と $(x, y + \Delta y, 0)$, $(x + \Delta x, y, 0)$ で定まる小さな四角形 $\Box_z$ のとき，循環は

$$\begin{aligned}\phi(\Box_z) = {} & v_x(x,y)\Delta x + v_y(x+\Delta x, y)\Delta y \\ & - v_x(x, y+\Delta y)\Delta x - v_y(x,y)\Delta y\end{aligned} \tag{4}$$

となる．整理すると Δx, Δy の最低次の近似で

$$\phi(\Box_z) = (\nabla \times \boldsymbol{v})_z \Delta x \Delta y \tag{5}$$

と書け，係数として速度場の**回転** $\nabla \times \boldsymbol{v}$ が現れる．この面積当たりの循環を渦度と呼ぶ．

一方，やはり速度場の面積分

---

*1)　簡単のため時間変化のない定常流を考える．

$$Q = \int\int_{\Sigma} \boldsymbol{v} \cdot dS \tag{6}$$

は，この面 Σ を横切る流量を表す．そこで Σ を上の $\square_z$ と $(x, y, \Delta z)$ で定まる小さな立方体の表面にとる．すると，微小量の最低次で

$$Q = \nabla \cdot \boldsymbol{v}\, \Delta x \Delta y \Delta z \tag{7}$$

を得る．Q が正の値のときは，この小さな立方体の中から流体が湧き出していることを意味する．だから，速度場の**発散** $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ は流体の湧き出し率を表す[1)]．

3. マクスウェルの方程式と微分形式

物理において最初にベクトル場を実在として感じるのは，電磁場だろう．電磁場 $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ は，次の基本方程式に従う．

マクスウェルの方程式

$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho,$ （ガウスの法則）

$\nabla \times \boldsymbol{B} - \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{c\partial t} = \dfrac{1}{c}\boldsymbol{J},$ （アンペールの法則）

$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0,$ （磁場の発散法則）

$\nabla \times \boldsymbol{E} + \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{c\partial t} = 0.$ （ファラデーの法則）

ここで，$\rho, \boldsymbol{J}$ はそれぞれ電荷密度と電流密度で c は光速である[*2)]．これらの法則は数学におけるストークスの定理などベクトル解析の基本的な概念と深く関係している．

3.1 微分形式

電磁場を微分形式を使って表現してみることで，いろいろな関係を非常に単純化できる．そこで，微分形式とはどのようなものかを簡単に説明しておこう[4)]．考えている空間上の座標を x^i で表すとき，ある関数 $f(x)$ の全微分を

$$df = \sum_i dx^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{8}$$

の形に書く．このように，全微分の右辺に現れるような量を一般化して**1 形式**と呼ぶ．一般の 1 形式 A は，x の関数 $A_i(x)$ を使って

$$A = \sum_i A_i(x) dx^i \tag{9}$$

のような形をしている．ここで，dx^i をベクトルの基底と考えることができる．すると，例えば 3 次元でのポテンシャル U の全微分は

$$dU = dx\frac{\partial U}{\partial x} + dy\frac{\partial U}{\partial y} + dz\frac{\partial U}{\partial z} = \nabla U \cdot d\boldsymbol{x} \tag{10}$$

となり，U の勾配が 1 形式の係数として現れる．

次に，**外積**を基底の間のウェッジ積（$\wedge$ 積）で表し

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i \tag{11}$$

と定義する．外積によって，一般の 2 形式

$$f_2 = \sum_{ij} \frac{1}{2} f_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j \tag{12}$$

が得られる．外積が反対称積であることから，係数として現れるテンソル f_{ij} は，反対称テンソル場 $f_{ij} = -f_{ji}$ のみが意味を持つ．さらに一般の p **形式**を

$$f_p = \frac{1}{p!} \sum_{i_1, \cdots, i_p} f_{i_1 \cdots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots dx^{i_p} \tag{13}$$

と定義する．係数 $f_{i_1 \cdots i_p}(x)$ はどの添え字の入れ替えに関しても反対称なテンソル場である．

次に，**外微分** d

$$d = \sum_i dx^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{14}$$

を導入する．外微分 d の作用は，一般の p 形式 f_p に対して，$(p+1)$ 形式

$$df_p = \frac{1}{p!} \sum_{\substack{i \\ i_1 \cdots i_p}} \frac{\partial f_{i_1 \cdots i_p}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \cdots dx^{i_p} \tag{15}$$

を与える．通常の関数を 0 形式と考え $p = 0$ の場合，(15) は全微分と一致するので，外微分は全微分の p 形式への拡張と考えられる．

最後に，D 次元空間での p 形式に対する $*$ 写像（**星印作用**）を定義しておく[*3)]．

---

*2） ここでは，ヘヴィサイド単位系を採用している．電磁気の参考書としては例えば文献 2) がある．また，マクスウェル方程式の 3 番目の式は定まった名前はないが[3)]，ここでは磁場の発散法則とした．

*3） 以下では簡単のために繰り返される添え字は原則として和をとる（アインシュタイン則）．また，微分形式間の積は断らない限りは外積と了解し，$\wedge$ の記号も省略する．

$$*\,dx^{i_1}dx^{i_2}\cdots dx^{i_p} = \frac{1}{(D-p)!}\epsilon^{i_1\cdots i_p}{}_{i_{p+1}\cdots i_D}dx^{i_{p+1}}\cdots dx^{i_D} \quad (16)$$

ここで，$\epsilon_{1_1,\cdots,i_D}$ は D 次元の完全反対称テンソル[*4)]で，添え字の上げ下げは計量を使って行うがユークリッド空間では区別する必要はない．3 次元空間では，例えば

$$*\,dx^1 = dx^2dx^3, \quad *\,dx^1dx^2dx^3 = 1 \quad (17)$$

で，$**f_p = f_p$ が成り立つ[*5)]．

3.2 電磁場と微分形式

電磁場のそれぞれの成分を係数とする 1 形式を次のように定義する．

$$E = E_i dx^i, \quad B = B_i dx^i \quad (18)$$

すると，ガウスの法則は

$$d*E = *\rho \quad (19)$$

と書ける．実際 $*E = E_x dydz + E_y dzdx + E_z dxdy$ であることを使うと

$$d*E = (\nabla\cdot\boldsymbol{E})dxdydz, \quad (20)$$

また 0 形式 ρ に関して $*\rho = \rho dxdydz$ なので (19) がガウスの法則に等しいことが確かめられる．

一方，1 形式の外微分は回転を与える．実際

$$dE = \frac{1}{2}\sum_{ijk}\epsilon_{ijk}(\nabla\times\boldsymbol{E})_i dx^j dx^k \quad (21)$$

となるので，ファラデーの法則は

$$dE + \frac{1}{c}*\dot{B} = 0 \quad (22)$$

と書ける[*6)]．同様に，アンペールの法則は

$$dB - \frac{1}{c}*\dot{E} = \frac{1}{c}*j. \quad (23)$$

ただし，$j = \sum_k j_k dx^k$ は電流 1 形式である．以上より，マクスウェルの方程式は

$$\begin{aligned} &d*E = *\rho, \quad dB - \frac{1}{c}*\dot{E} = \frac{1}{c}*j, \\ &d*B = 0, \quad dE + \frac{1}{c}*\dot{B} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

とまとめることができる．

4. ストークスの定理

ここまでは，ベクトル場の演算として微分によるものを取り上げてきた．またそれらを表現する道具として，p 形式とその外微分を説明した．ベクトル場の物理における役割を見るには，さらにベクトル場とその積分との関係を理解する必要がある．その中心にあるのが，数学のストークスの定理である．

今 p 形式 f_p の p 次元曲面上の領域 D_p での積分を

$$I = \int_{D_p} f_p \quad (25)$$

と定義する．例えば，1 形式 A の積分

$$I = \int_C A_i dx^i \quad (26)$$

は曲線 C に沿った線積分である．

ストークスの定理は，1 変数積分のときに関数 f の微分 f' の定積分が

$$\int_a^b f'dx = f(x)\Big|_a^b \quad (27)$$

と端点の値で書けることの一般化で，微分形式を使うと次のように述べることができる．

ストークスの定理

$(p+1)$ 次元の領域 D_{p+1} とその p 次元境界 ∂D_{p+1} を考える．このとき，与えられた p 形式 f_p の積分に関して

$$\int_{D_{p+1}} df_p = \int_{\partial D_{p+1}} f_p \quad (28)$$

が成り立つ．

例えば，ボール状の領域 D_3 とその境界の球面 ∂D_3 を考える．このとき電場から得られる 2 形式 $*E$ に関して

$$\int_{\partial D_3} *E = \int_{D_3} d*E = \int_{D_3} *\rho \quad (29)$$

が成り立つ[*7)]．最後の等式は (24) のガウスの法

*4) $\epsilon_{1,2,\cdots,D} = 1$.

*5) D 次元の p 形式では $**f_p = (-1)^{p(D-p)}f_p$.

*6) 微分形式の時間微分は係数の時間微分である．つまり，$\dot{E} = \dot{\boldsymbol{E}}\cdot d\boldsymbol{x}$.

*7) 特にこの場合，発散定理またはガウスの定理とも呼ぶ．

則を使った．この式は，境界 ∂D_3 上の電場の面積分がその中に含まれる電荷の総和に等しいという，ガウスの法則の積分形に他ならない．同様に，アンペールの法則とストークスの定理から $\dot{E}=0$ のとき

$$\int_{\partial D_2} B = \int_{D_2} dB = \int_{D_2} *j \tag{30}$$

が導かれるが，これは，磁場の ∂D_2 上の線積分が面 D_2 を横切る電流の総和に等しいという積分形のアンペールの法則になっている．

さて，境界の境界は必ず空集合であるから

$$0 = \int_{\partial\partial D} f = \int_{\partial D} df = \int_{D} ddf \tag{31}$$

が任意の領域 D 上の任意の p 形式に関して成り立つ．つまり，$ddf=0$ が常に成立することを意味する．もちろん，このことは外微分の定義から直接証明することもできる．後で説明するように，この命題の逆，つまり「$df_p=0$ ならば $f_p=d\alpha_{p-1}$ となる α_{p-1} が存在するか」という問題は空間のトポロジーと深く関わっている．この問題が必ずしも自明でないことは，上記の関係を使って「境界のない空間は必ず何かの境界になるか」と読み替えてみると分かってもらえるだろう．

5. ゲージ変換

電磁場を記述するときにポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル A_i を使う．ポテンシャルと電磁場の関係は，

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}} \tag{32}$$

で，微分形式 $A=\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{x}$ を使うと

$$B = *dA, \quad E = -d\phi - \frac{1}{c}\dot{A} \tag{33}$$

と表せる．電磁場のポテンシャルは，ただ便利というだけでなく本質的と考えられる．例えば電磁場中の荷電粒子の運動を表すラグランジアンは，ポテンシャルを使って

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} - e\phi \tag{34}$$

と書け，ラグランジュ方程式を書くと

$$ma = \boldsymbol{F} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \tag{35}$$

になる．これは確かにクーロン・ローレンツ力の働く荷電粒子の運動方程式に他ならない．

さて，電磁場をポテンシャルを使って表すと，**ゲージ変換**

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\lambda, \quad \phi' = \phi + \frac{1}{c}\dot{\lambda} \tag{36}$$

に対する不変性が存在する．つまり，変換後の場 $\boldsymbol{A}', \phi'$ を使っても (32) は同じ電磁場になる．ここで，λ は時空の任意関数である．これは，ポテンシャルによる電磁場の表現が関数一個分の冗長性を持つことを意味している．しかし，この冗長性のおかげで得られるゲージ不変性は，現代の場の理論において非常に重要な役割を果たす．

ゲージ不変性は，ローレンツ不変な形に電磁場の法則をまとめるとさらにはっきりする．そこで，4 元ポテンシャル $\mathcal{A}_\mu = (-\phi, \boldsymbol{A})$ を導入する．以下，$x^0 = ct$，時空ベクトルを $x^\mu = (x^0, x^i)$ とし，ギリシャ文字 $\mu, \nu, \cdots$ は $0, 1, 2, 3$ を，$i, j, k, \cdots$ は $1, 2, 3$ を表す．すると，4 元ポテンシャルは 1 形式として

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu = -\phi dx^0 + A_k dx^k \tag{37}$$

のようにまとめることができる．このとき電磁場は

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{38}$$

にまとめられる．実際 $\mathcal{F}_{k0} = E_k, \mathcal{F}_{ij} = B_k$（$ijk$ は 123 の巡回）になっている．$\mathcal{F}_{\mu\nu}$ を**場の強さ**と呼ぶ．電流形式を $j = \rho dt + \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{x}$ とすると，マクスウェルの最初の 2 方程式は

$$d * \mathcal{F} = \frac{1}{c} * j \tag{39}$$

とまとめられる．一方ゲージ変換は

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} + d\lambda \tag{40}$$

と書ける．$\mathcal{A}'$ が $\mathcal{A}$ と同じ電磁場 $\mathcal{F}$ を与えることは

$$dd\lambda = 0 \tag{41}$$

という恒等式の帰結であることがわかる．一方

$$d\mathcal{F} = dd\mathcal{A} = 0 \tag{42}$$

なので，これも恒等的に 0 である．この恒等式は**ビアンキ恒等式**と呼ばれ，マクスウェル方程式の磁場の発散法則とファラデーの法則になっている．

6. ポアンカレの補題

さて，話をもう一度3次元に戻そう．マクスウェルの方程式の 3 番目，磁場の発散法則 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ について考えよう．これは，微分形式で書くと

$$d * B = 0 \tag{43}$$

である．通常電磁気学では，この式から磁場がベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ で書けるとして (32) に至る．実際，微分形式では (33) ならば $*B = dA$ なので，$dd = 0$ であることを考えると (43) は自明である．ところが，ストークスの定理のところで話したように，$d * B = 0$ から，即ベクトルポテンシャルへという論理には少し注意するべき点がある．

数学的には，この問題の答えは

ポアンカレの補題

> 与えられた p 形式 f_p に関して $df_p = 0$ ならば $f_p = d\alpha_{p-1}$ となる $(p-1)$ 形式 α_{p-1} が局所的には必ず存在する．

で与えられている．要するにポテンシャルは存在すると言っているので，何も問題ないのではと思うかもしれないが，ここで注意するべきは「局所的」の一言だ．このことを考えていくと数学的にはコホモロジーの理論につながり，物理的にはモノポールやいわゆるトポロジカル・ソリトン等につながる．

7. モノポール

モノポールは，ディラックが「電荷があるのにどうして磁荷がないのか」という謎への答えとして与えたものだ．もし，磁荷が存在すれば，$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \rho_m$ となりマクスウェルの方程式が $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \to -\boldsymbol{E}$ の入れ替えと，同時に $\rho \leftrightarrow \rho_m$ と電流 $\leftrightarrow$ 磁流の

入れ替えによって対称，つまり電場と磁場の役割が対称になる．この対称性は**双対性**（duality）と呼ばれ，ゲージ対称性とともに現代の理論物理において中心的な概念である．

原点に磁荷 g のモノポールがあるときの磁場 $\boldsymbol{B}$ は，点電荷の場合との類推から磁荷密度が δ 関数の

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = g\,\delta^3(\boldsymbol{x}) \tag{44}$$

を満たすとすると，磁場 $\boldsymbol{B}$ は電場と同様に

$$\boldsymbol{B} = \frac{g}{4\pi r^2}\frac{\boldsymbol{x}}{r} \tag{45}$$

となる．ただし，$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$．問題はベクトルポテンシャルで磁場を表すと必然的に $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ となるので，上のような磁場を与えるベクトルポテンシャルをどう考えるかである．

実は，モノポール磁場 (45) を与えるポテンシャル $A = \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{x}$ は知られている．次の 2 種類の場

$$A_\pm = \pm\frac{g(xdy - ydx)}{4\pi r(r \pm z)} \tag{46}$$

はその例である．実際

$$dA_\pm = \frac{g(zdxdy + ydzdx + xdydz)}{4\pi r^3} \tag{47}$$

となり，磁場 (45) が 1 形式 $B = * dA_\pm$ として得られる．では，このポテンシャルのどこが問題なのか？

問題は，例えば A_+ が $r = -z$（z 軸上 $z < 0$ のところ）で発散していることにある．磁場 $\boldsymbol{B}$ は発散していないので，これはベクトルポテンシャルが悪いだけということになる．実は磁場 (45) を出すベクトルポテンシャルは，原点からでる紐状の領域で必ず発散することが分かる．これをディラック紐と呼ぶ．実際，A_- は $r = z$ で発散している．つまり，

大域的ポテンシャルの問題

大域的に一つのベクトルポテンシャルでモノポールの磁場を表すことはできない．

ところが，A_+ と A_- はディラック紐の領域を除けば，同じ磁場 B を与えているので**ゲージ同値**，つまりゲージ変換で互いに移り合う．見方を変えると，ディラック紐はゲージ変換で位置を変える．

この問題の解決策は，$A_\pm$ を合わせて空間全体でポテンシャルが定義されていると考えること．つまり，$r = -z$ 以外では A_+, $r = z$ 以外では A_- を採用する．ポアンカレの補題から，一般に一つのポテンシャルでは空間全領域を覆いきれないとしても，いくつかの領域に分けるとそれぞれの領域で「局所的」にはポテンシャルを導入することは必ずできる．もちろん，領域が重なるところでは 2 つのポテンシャルは同じ磁場を与えるように，ゲージ同値になっていなければならない．そこで，これらの組で一つの磁場を表すとするのだ．このように考えれば，モノポールが存在しても，これまでの電磁気の理論を変更する必要はない．このようなモノポールをディラックモノポール[5)]と呼ぶ．

8. ゲージ場とベクトル束

モノポールの議論は数学的には，ベクトル束，特に複素線束（1 次元複素ベクトル束）の理論と深く関係している．複素ベクトル束は，物理的には N 個の複素スカラー場 ϕ^a を考えると自然に導入される．これらの場を N 次元縦ベクトル $\varPhi = \{\phi^a\}$ として表す．

場 $\varPhi$ は，時空の各点 x^μ に，ある N 次元複素ベクトルを定める．このベクトルは 3 次元空間のベクトルではなく，仮想的な N 次元空間のベクトルである．この仮想空間を**内部空間**と呼ぶ．数学では内部空間は**ファイバー**，スカラー場 $\varPhi$ は**切断**と呼ばれる．この内部空間を物理的実在としてとらえるのが高次元理論で，弦理論などに現れ，高次元宇宙モデルなども議論されている．

ここで，場 $\varPhi$ の行列 U による次のような変換を考える．

$$\varPhi \;\to\; \varPhi' = U\varPhi. \tag{48}$$

通常 U は，ベクトルの長さ $\sqrt{\varPhi^\dagger\varPhi}$ を変えない変換と仮定するので $U^\dagger = U^{-1}$，つまりユニタリー行列である．変換行列 U が場所によると，変換で $d\varPhi$

は一般に共変にならない．つまり，$d\Phi' \neq Ud\Phi$．そこで，$N \times N$ 行列の 1 形式の場，いわゆる**ゲージ場** A を導入して，**共変微分** D による微分

$$D\Phi \equiv (d - i\kappa A)\Phi \tag{49}$$

の**共変性**，つまり (48) の変換で

$$D\Phi \to D'\Phi' = (d - i\kappa A')\Phi' = UD\Phi \tag{50}$$

となると要請する．共変性はゲージ場 A を

$$A \ \to \ A' = A + i\frac{1}{\kappa}UdU^{-1} \tag{51}$$

と変換すれば満たされる．ここで，数学的には必要ない定数 κ を導入した．物理的には κ はゲージ場と粒子の相互作用の強さを表す定数になる．例えば電子と電磁場だと $\kappa = \frac{e}{\hbar c}$ である*8)．$N = 1$ の場合は，$U = e^{i\kappa\lambda}$ とするとゲージ変換の式 (40) が得られる．つまり，電磁ポテンシャルはゲージ場ということになる．

モノポールのときと同様に，ゲージ場は全空間で一つの A で表されている必要はない．一般に空間をいくつかの領域に分けて，それぞれの領域で与えられており，領域が重なるところではゲージ変換でつながっていれば良い．一方，ゲージ変換 (48) は，見方を変えると内部空間の座標変換を行っているとも考えられる．これらのことから，ゲージ場の大域的な定義は，内部空間の座標を全空間で共通にとらずに，異なる空間の点でその対応関係を与えながらつなげば良いことが分かる．この考え方は**ベクトル束**の考え方に他ならない．共変微分はそのように各点での内部空間の座標の違いが考慮されたベクトルの微分を与えており，ゲージ場はその意味で**接続**とも呼ばれる．さらに，共変微分を 2 回場に作用させたとき $D^2\Phi$ で得られる 2 形式 $F = \frac{i}{\kappa}D^2$ を**曲率**と呼び，内部空間のつなぎ合わせの曲がり具合を与えている．**複素線束**（$N = 1$）の場合は (38) の場の強さに等しい．

最後にモノポールの磁荷をポテンシャルを使って計算してみよう．モノポールの場合は，2 つのゲージ場がともに定義されている領域，つまり空間から z 軸を除いた領域では

$$A_+ - A_- = \frac{g(xdy - ydx)}{2\pi(r^2 - z^2)} = \frac{i}{\kappa}UdU^{-1} \tag{52}$$

が成り立つ．このときの U は具体的には，

$$U = \left(\frac{x + iy}{x - iy}\right)^{\frac{\kappa g}{4\pi}} \tag{53}$$

で与えられる．$|U| = 1$ であることは $x + iy = \rho e^{i\theta}$ とすると $U = e^{i\frac{\kappa g}{2\pi}\theta}$ になるので明らかだ．

モノポールの磁荷は場の強さ F をモノポールを囲む球面 S^2 で積分すれば求まる．ところが，2 つのゲージ場 $A_\pm$ は，それぞれ S^2 の南極と北極で定義されていない．そこで，S^2 を北半球 D_+ と南半球 D_- で分けそれぞれの領域で発散のないゲージ場を使うと，磁荷 g は

$$\int_{S^2} F = \int_{D_+} dA_+ + \int_{D_-} dA_- = \int_{S^1} (A_+ - A_-) \tag{54}$$

と書ける．ただし S^1 は $D_\pm$ の境界で赤道に相当し，最後の変形はストークスの定理を使った．この式に (52) を代入すると

$$\frac{\kappa}{2\pi}\int_{S^2} F = \frac{i}{2\pi}\int_{S^1} UdU^{-1} \tag{55}$$

を得る．ところが，右辺は U の**巻きつき数**と呼ばれる複素線束の捩れ具合を表す位相不変量で整数にならなければならない．この結果，電子の場合

$$\frac{eg}{2\pi\hbar c} = n \ , \quad n \in \mathbb{Z} \tag{56}$$

と電荷と磁荷の積がとびとびの値をとることが分かる*9)．つまり，モノポールが存在すれば電荷はとびとびの値しかとれなくなる．これを，ディラックの電荷の量子化と呼ぶ[5]．

9. まとめ

ベクトル解析は，物理の様々な分野で顔を出す．さらに様々な方向に展開し，関連した数学の分野と物理の関係へと発展していく*10)．ここでは，ベ

*8) $\hbar$ はプランク定数．

*9) 物理的には (53) の U による変換 (48) 後の場（電子の波動関数）の一価性から得られる．

*10) 例えば，文献 6, 7) が詳しい．

クトル解析がどのように電磁気学に応用され，さらに進んだ場の理論へと展開していくかをモノポールを例に見てきた．場の理論への応用としては，他にも例えば，アインシュタインの一般相対性理論は数学的には接束の理論を展開していくことに対応している．ここで少し紹介したベクトル束はそれを一般化したものと言える．いずれの理論もゲージ対称性に基づく理論であり，ゲージ変換の概念が中心的役割を果たす．

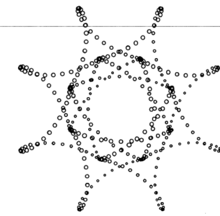
トポロジーとの関係もさらに様々な展開を見せる．巻きつき数以外の様々な位相不変量が場の理論に現れ重要な役割を果たす．また，モノポールの議論はインスタントンなどにさらに一般化され，その周りのフェルミオンの振舞いは，指数定理などにつながっていく．

参考文献

1) 今井功著，『流体力学（前篇）』，裳華房 (1973).
2) 太田浩一著，『電磁気学の基礎 I, II』，シュプリンガージャパン (2007).
3) 太田浩一著，『マクスウェル理論の基礎 相対論と電磁気学』，東京大学出版会 (2002).
4) H. フランダース著，岩堀長慶訳，『微分形式の理論（およびその物理科学への応用）』，岩波書店 (1967).
5) P.A.M. Dirac, "The quantized singularities in the electromagnetic field", *Proc. Roy. Soc. A* **133** (1931) 60.
6) T. Eguchi, P.B. Gilkey, A.J. Hanson, "Gravitation, gauge theories and differential geometry," *Phys. Rep.* **66**, (1980) 214–390.
7) 中原幹夫著，『理論物理学のための幾何学とトポロジー I, II』，ピアソン・エデュケーション (2000).

（わたむら・さとし，東北大学大学院理学研究科）

フーリエ解析と流体の波や流れ



船越　満明

1. はじめに

流体力学では，水や空気を初めとする流体の様々な運動を調べるときに，フーリエ解析の考え方を使うことが多い．本編では，その一つの例として，水面波の問題におけるフーリエ解析の使われ方を主に説明する．

水面波とは，水面（一般には液体の自由表面）の変位が波として伝わっていくものである．海岸に打ち寄せる波，池に石を投げ入れたときにできる波紋，津波，航行中の船の斜め後ろにできる波，地震によって自由表面をもつ石油タンク内にできる波などがその代表例であり，水面波は我々の身近にある重要な現象である．また，以下で説明するように，水面波の運動を支配する方程式系は非線形であるので，水面波は様々な非線形現象を示す力学系としても興味深い対象である．

2. 水面波の基礎方程式系

水面波は，自由表面をもつ液体の示す運動モードであり，重力や表面張力を復元力とする波であるが，これを理論的に取り扱う際には，この液体は非粘性非圧縮性の流体であるとする．水を初めとする実際の流体は粘性をもつが，粘性の影響が現れるのは流体層の底面や自由表面の近くに限られるので，水面波の全体としての運動に対する粘性の効果は，流体の深さがとくに小さい場合を除いて，無視することができる．

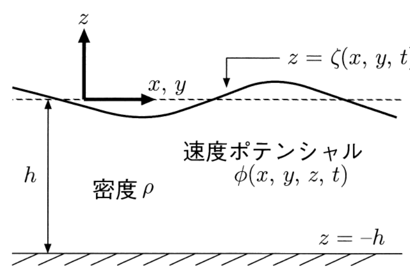


図 1　水面波の座標系．

図 1 のように，水平方向の直交座標 x, y と鉛直上向きの座標 z からなる空間座標を，密度 ρ の流体層の自由表面の位置が水面波の生じていないときに $z=0$ となるように選び，水面波の自由表面変位を時間 t も用いて $z=\zeta(x,y,t)$ と表す．また，流体層の底面は水平であって水深 h を用いて $z=-h$ と表せるとする．次に，水面波に伴う流体の速度ベクトル $\boldsymbol{u}$ は x,y,z,t の関数となる．非粘性流体においては，$\boldsymbol{u}$ から計算される渦度 $\boldsymbol{\omega}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$ が初期にゼロであれば，その後も引き続きゼロであることが示せるので，水面波の理論では，水面波に伴う流れは $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{0}$ を満たす「渦なし流れ」であると仮定する．渦なし流れの速度場 $\boldsymbol{u}$ は，**速度ポテンシャル** $\phi(x,y,z,t)$ を用いて $\boldsymbol{u}=\mathrm{grad}\,\phi$ と表すことができる．

流体の内部では，質量保存則である連続の式 $\mathrm{div}\boldsymbol{u}=0$ が満たされ，この式は速度ポテンシャル ϕ を用いると

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0,\quad -h\le z\le\zeta \quad (1)$$

と書ける．また底面においては，流体の鉛直速度成分が 0 なので，次の条件が得られる．

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=0,\quad \text{at } z=-h. \quad (2)$$

自由表面では，自由表面上にいた流体の微小部分が自由表面上にあり続けるという，次の運動学的条件が満たされる．

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y}=\frac{\partial\phi}{\partial z},\quad \text{at } z=\zeta. \quad (3)$$

また，表面張力の効果を無視すると，自由表面の内側と外側における圧力の連続性を表す，次の力学的条件も満たされる．

$$p=p_0,\quad \text{at } z=\zeta. \quad (4)$$

ここで，p は流体の圧力であり，p_0 は例えば大気圧のような自由表面外部での圧力である．そして，非粘性流体の運動方程式であるオイラー方程式から，渦なし運動に対するベルヌーイの定理

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,\phi)^2=-\frac{p}{\rho}-gz+C \quad (5)$$

が導かれる．ここで，C は任意定数であり，g は重力加速度の大きさを表す．(5) から得られる p の式を (4) に代入し，C の値を適当に決めると，次式が得られる．

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,\phi)^2+g\zeta=0,\quad \text{at } z=\zeta. \quad (6)$$

以上の (1)–(3), (6) が，水面波を表す変数である ζ と ϕ を決めるための基礎方程式系である．この方程式系は，自由表面での 2 つの境界条件の中に ζ と ϕ に関して非線形の項を含むことと，これらの境界条件が求めるべき変数 ζ によって指定される自由表面で満たされなければならないことから，非線形の式となっている．したがって，この方程式系の解を求めることは一般に容易ではない．しかし，次節で説明するように，自由表面の変位や流体の運動速度が微小である場合には，基礎方程式系は線形の方程式で近似され，その解について詳しく調べることができる．その際に，フーリエ解析の考え方が大変役に立つ．

3. 水面波の線形理論

水面波の基礎方程式系は，ζ と ϕ について 1 次の項のみを残して線形化すると，次のように書ける．

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0,\quad -h\le z\le 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{\partial\phi}{\partial z},\quad \frac{\partial\phi}{\partial t}+g\zeta=0,\quad \text{at } z=0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=0,\quad \text{at } z=-h. \quad (9)$$

ここで，自由表面 $z=\zeta$ での 2 つの境界条件 (3) と (6) は，$z=0$ での条件に置き換えられている．この置き換えによる違いを表す項は，ζ と ϕ について 2 次以上となるので無視できる．フーリエ変換やフーリエ級数は偏微分方程式を解くときの一つの有力な手段であることはよく知られているが，微小振幅の水面波の基礎方程式系 (7)–(9) も，空間座標 x, y, z および時間 t を独立変数とする偏微分方程式系と考えることができるので，フーリエ変換を用いて解くことができる．

以下では，y 方向に一様で x, z 平面上の流体運動を伴う水面波を最初に考えることにする．まず，$\zeta(x,t)$ と $\phi(x,z,t)$ が十分滑らかな連続関数であり，また遠方では波が十分小さく，$|\zeta|$ や $|\phi|$ が $x\to\pm\infty$ で十分速く 0 に近づくと仮定すると，これらの関数の x に関するフーリエ変換

$$H(k,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(x,t)e^{-ikx}dx, \quad (10)$$

$$\Phi(k,z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,z,t)e^{-ikx}dx \quad (11)$$

が定義できる．よく知られているように，関数 ϕ や ζ の n 階 x 偏微分のフーリエ変換は，これらの関数のフーリエ変換に $(ik)^n$ を掛けたものに等しい．ゆえに，(7)–(9) において y 偏微分の項を 0 とした式のフーリエ変換は，以下のように書ける．

$$-k^2\Phi+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0,\quad -h\le z\le 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial\Phi}{\partial z},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial t}+gH=0,\quad \text{at } z=0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0,\quad \text{at } z=-h. \quad (14)$$

z に関する微分方程式と見なせる (12) を (14) の境界条件の下で解くことによって，

$$\Phi = A(k,t)\cosh[k(z+h)] \qquad (15)$$

を得る．ここで，$A(k,t)$ は複素数値関数である．(15) を (13) の第 1 式に代入して得られる $\partial H/\partial t = Ak\sinh(kh)$ と (15) を，(13) の第 2 式を t で偏微分したものに代入することによって，

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\omega^2 A$$

ただし，

$$\omega = \sqrt{gk\tanh(kh)} \qquad (16)$$

を得る．したがって，複素数値関数 $b_+(k)$ と $b_-(k)$ を用いて

$$H = b_+(k)e^{i\omega t} + b_-(k)e^{-i\omega t}, \qquad (17)$$

$$\Phi = \frac{i\omega\cosh[k(z+h)]}{k\sinh(kh)} \times \left(b_+(k)e^{i\omega t} - b_-(k)e^{-i\omega t}\right) \qquad (18)$$

と表すことができる．そして，ζ が実数であることから $H(-k,t) = H^*(k,t)$ が成り立つので，

$$b_+(-k) = b_-^*(k), \quad b_-(-k) = b_+^*(k) \quad (19)$$

が言える．ここで，$*$ は複素共役を表す．したがって，フーリエ逆変換の式

$$\zeta(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(k,t)e^{ikx}dk,$$

$$\phi(x,z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k,z,t)e^{ikx}dk$$

と (19) より，水面波を表す解

$$\zeta(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}[b_-(k)e^{i(kx-\omega t)} + b_+(k)e^{i(kx+\omega t)}]dk + \text{c.c.}, \quad (20)$$

$$\phi(x,z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{i\omega\cosh[k(z+h)]}{k\sinh(kh)} \times [-b_-(k)e^{i(kx-\omega t)} + b_+(k)e^{i(kx+\omega t)}]dk + \text{c.c.} \quad (21)$$

が得られる．ここで，c.c. はその前の項の複素共役を表す．また，$b_+(k)$ と $b_-(k)$ の形は初期条件から決まる．

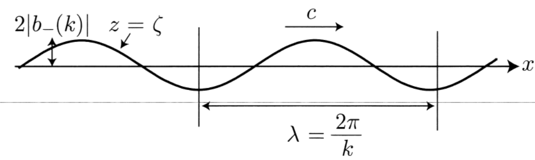


図 2　x 軸正方向に伝播する定常進行波.

水面波の基礎方程式系を解いて得られる (20), (21) の解は，次のように解釈することができる．すなわち，(20) において，ある k に対する被積分関数の第 1 項とその複素共役の和

$$b_-(k)e^{i(kx-\omega t)} + b_-^*(k)e^{-i(kx-\omega t)}$$

は，次のように書き直せる．

$$2|b_-(k)|\cos(kx - \omega t + \varphi).$$

ただし，$\tan\varphi = \text{Im}[b_-(k)]/\text{Re}[b_-(k)]$ である．これは図 2 に示したように，波長が $\lambda = 2\pi/k$，波数が k であり，振幅が $2|b_-(k)|$ の正弦波を表す．そしてこの波は，振動数 ω をもち，形を変えることなく**位相速度** $c = \omega/k$ で x 軸正方向に伝播する**定常進行波**である．一方，(20) の同じ k に対する被積分関数の第 2 項とその複素共役の和は，同じ位相速度で x 軸負方向に伝播する振幅 $2|b_+(k)|$ の定常進行波を表す．以上のことから，自由表面変位は，両方向に伝播するいろいろな波数（波長）をもった正弦波の重ね合わせと考えることができる．また (21) より，水面波に伴う速度場も，両方向に伝搬する各波数の波に伴う速度場の重ね合わせと考えることができる．

(16) の ω を k で割って得られる水面波の位相速度 c は，系に含まれるパラメータ g, h だけでなく波数 k に依存している．すなわち水面波は，音波などと違って，その波長によって位相速度が異なるという特徴をもっており，そのような性質をもつ波は**分散性波動**と呼ばれる．また，ω を k で表した (16) のような式は分散関係式と呼ばれ，そのグラフは**分散曲線**と呼ばれる．(16) から得られる水面波の分散曲線は図 3 のようになる．分散曲線

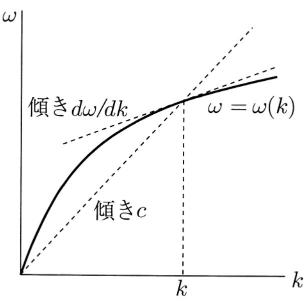


図 3 水面波の分散曲線 $\omega=\omega(k)$.

上の各点と原点を結ぶ直線の傾きが位相速度を表すので,(表面張力の効果を無視した場合の)水面波では波長が長いほど位相速度が大きいことがわかる.また (16) において水深が波長に比べて十分大きい場合は,$kh \gg 1$ が成り立つので $\omega=\sqrt{gk}$ と近似できる.このような水面波は**深水波**と呼ばれ,深水波の位相速度は $\sqrt{\lambda}$ に比例する.一方,波長が水深に比べて十分大きい水面波である**浅水波**では,kh が 1 よりずっと小さいことから (16) は $\omega=\sqrt{gh}k$ と近似できる.津波はその波長が数十 km 程度になる場合もあって浅水波の一つの例であるが,浅水波の位相速度 $c=\sqrt{gh}$ は深いところほど大きいので,例えば太平洋の中央部のような水深が 4,000 m のところでは,津波は時速 720 km 程度の非常に速い速度で伝播する.

(21) の速度ポテンシャルの式を x や z で偏微分すると,水面波に伴う流体運動の速度の各成分が得られる.(21) の各波数 k に対する被積分関数の z に依存する部分は $\cosh[k(z+h)]$ の形をもつので,深水波においては,これらの速度成分は e^{kz} の形で z に依存する.すなわち,波に伴う流体運動は波長程度の深さまででしか見られず,海面に大きな波がたっている場合でも,その波長よりもずっと深い海中は静かである.この意味で,深水波は自由表面付近に局在した波であると言える.一方,浅水波では,波に伴って流体は主に水平方向に往復運動をすることが (21) からわかる.

次に,ある正の波数 k_0 を中心とした狭い範囲に含まれる波数をもち x 軸正方向に伝播する波だけが主に存在する場合を考えてみよう.具体的には,(20) において

$$b_-(k)=e^{-\alpha(k-k_0)^2},\quad b_+(k)=e^{-\alpha(k+k_0)^2}$$

であると仮定し,α は $\alpha k_0^2 \gg 1$ を満たす正の大きい数であるとする.この $b_+(k)$ は 0 以上の k に対しては非常に小さく,ほとんど 0 と見なせる.この場合の時刻 $t=0$ での自由表面変位は,(20) の積分を実行することにより,次のようになる.

$$\zeta(x,0)=\frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}}e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}\cos(k_0x). \qquad (22)$$

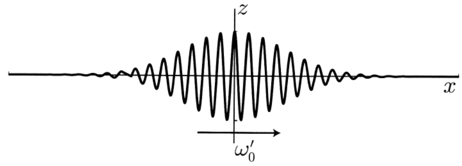


図 4 水面波の波束.

この (22) は,図 4 に示したように,振幅が $\exp[-x^2/(4\alpha)]$ の形で $|x|$ の増加とともにゆっくりと減少していく,波数 k_0 の波の**波束**を表していると考えることができる.この水面波の時刻 t での自由表面変位は,(20) から,

$$\zeta(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha(k-k_0)^2}e^{i(kx-\omega t)}dk+\text{c.c.} \qquad (23)$$

と表せる.ここで,$e^{-\alpha(k-k_0)^2}$ は k_0 から離れた k では小さい値になるので,(23) の積分に寄与するのは k_0 に近い k の範囲のみであると考えてよい.そこで,k の関数である ω を

$$\omega(k)=\omega_0+\omega_0'(k-k_0)+O(k-k_0)^2$$

のように $k=k_0$ のまわりでテイラー展開して,$k-k_0$ の 1 次の項までで打ち切るという近似を行う.ここで,$\omega_0=\omega(k_0)$ であり,ω_0' は $k=k_0$ における $d\omega/dk$ の値である.この近似の下で (23) の積分を実行すると

$$\zeta(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}}e^{-\frac{(x-\omega_0't)^2}{4\alpha}}\cos(k_0x-\omega_0t) \quad (24)$$

が得られる.すなわち,(22) の初期波束を構成する波数 k_0 の波は位相速度 ω_0/k_0 で伝播するが,

波束全体としては速さ ω_0' で x 軸正方向に伝播していく．この ω_0' は波束という波の群れ全体の伝播する速度と考えられるので，**群速度**と呼ばれる．群速度は分散曲線の傾きに対応しており，水面波のような分散性波動においては，図 3 からもわかるように位相速度と群速度は一般に異なる．

海で見られる波などの自由表面変位 ζ は，一般に水平座標 x と y の両方に依存する．このような場合には，$\zeta(x,y,t)$ と $\phi(x,y,z,t)$ が十分滑らかな連続関数であり，$|\zeta|$ や $|\phi|$ が遠方で十分速く 0 に近づくと仮定すると，これらの関数の x,y に関する 2 重フーリエ変換を考えることができる．そして，(7)–(9) の方程式系に対して，y 方向に一様な場合と同様な考え方を用いると，次のような ζ の式を得ることができる．

$$\zeta(x,y,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} b(k_x,k_y) \times e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}dk_x dk_y + \text{c.c.} \quad (25)$$

ここで，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{k}=(k_x,k_y)$ と $\boldsymbol{x}=(x,y)$ の内積を表す．また，ω は y 方向に一様な場合と同じ (16) によって表されるが，今の場合は $k=\sqrt{k_x^2+k_y^2}$ である．さらに，$b(k_x,k_y)$ は初期条件から決まる複素数値関数である．

(25) の各 k_x,k_y に対する被積分関数 $b(k_x,k_y)$ $e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$ とその複素共役の和は，波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ をもち振動数が ω の定常平面進行波を表す．すなわち，ζ が最大となるこの波の尾根線は図 5 のように $\boldsymbol{k}$ と直交する直線群となり，その間隔である波長は $\lambda=2\pi/k$ となる．また，この波は $\boldsymbol{k}$ の方向に位相速度 $c=\omega/k$ で伝播し，位相速度は波長だけで決まって伝播方向には依存しない．(25) は，水面波が，波長によって決まる位相速度で様々な方向に伝播する，様々な波長の正弦波形の定常平面進行波（成分波）の重ね合わせと考えられることを示している．例えば，海洋の波について，現在の状況を把握したり今後の変化を予測したりする際には，このような考え方が基本となる[1]．

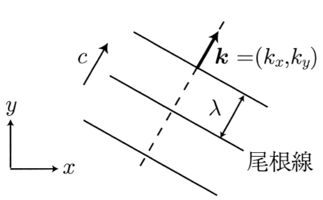


図 5　定常平面進行波．

なお，水面波の波長が短いときには，表面張力が復元力として重要となり，その影響は (4) や (6) において表面張力の寄与を付け加えることによって表すことができる．この表面張力の効果も含めた水面波の基礎方程式系や線形理論に関する詳しい解説は，例えば文献 2～4) を見てほしい．

4. 共鳴相互作用と非線形理論

線形理論においては，水面波の各成分波（定常平面進行波）は他の成分波の存在に関係なく一定の振幅で決まった方向に伝播していく．しかし，既に述べたように，水面波の基礎方程式系 (1)–(3), (6) は非線形であるので，波の振幅が微小でないときは，各成分波の振舞いは他の成分波の影響を受ける．具体的には，(25) における $b(k_x,k_y)$ のような各成分波の振幅や位相のずれを表す量は，線形理論の場合と違って時間とともに変化していく．この時間変化は，成分波の間の相互作用によるものであると解釈することができる．

この相互作用として重要であるのが，以下で説明する**共鳴相互作用**[2,5～7]である．これは，例えば波数ベクトル $\boldsymbol{k}_j$ と振動数 ω_j $(j=1,\ldots,n)$ をもつ n 個の成分波が以下の共鳴条件を満たす場合に，これらの波の間に起こる相互作用であり，n 波共鳴相互作用と呼ばれる．

$$\sum_{j=1}^{n} s_j\boldsymbol{k}_j=\boldsymbol{0}, \quad \sum_{j=1}^{n} s_j\omega_j=0.$$

ここで，s_j は 1 あるいは -1 である．この条件が満たされる場合には，各成分波に対して他の成分波は共鳴的な外力として働き，成分波のエネルギーのやりとりがすみやかに起こる．したがって，非線形水面波の時間発展を考える際には共鳴相互作用は重要である．また，少数個の成分波の間の共鳴相互作用ほど，短い時間スケールで起こるの

で重要であると考えられる．分散性波動においては，4 波共鳴は必ず可能であるが，3 波共鳴の条件を満たす成分波の組が存在するかどうかは，分散関係式の形に依存する．これまで考えてきた重力を復元力とする水面波では 3 波共鳴は不可能であるが，表面張力の効果も入れたときの水面波では 3 波共鳴が可能である．このような共鳴相互作用は，非線形の定常進行波の不安定化や海洋波を特徴づける量の時間発展などにも関係しており，非線形水面波の解析において大変重要な概念である．

また，この共鳴相互作用によって水面波を構成する各成分波の振幅や位相のずれが時間的に変化していく過程を表す方程式も導かれており，**ザハロフ方程式**と呼ばれている．ザハロフ方程式は，重力を復元力とする水面波において可能な 4 波以上の共鳴相互作用の中で 4 波共鳴の効果だけを取り入れたときの，各成分波の振幅や位相のずれの時間発展を記述する非線形の微積分方程式であり，この方程式に基づいた非線形水面波の振舞いに関する研究が数多く行われている[8]．

5. 流体運動の理解とフーリエ解析

フーリエ解析の考え方は，これまで説明した水面波に限らず，様々な流体運動の解析において用いられている．

例えば，ある与えられた流れの微小撹乱に対する**安定性**を考える際[9,10]には，しばしばこの撹乱をフーリエ変換あるいはフーリエ級数展開し，各波数の撹乱成分の振幅の指数関数型時間変化率を固有値とする固有値問題を解く．この場合，撹乱の時間発展を決める方程式は撹乱について線形であるので，それぞれが時間発展する各撹乱成分を足し合わせたものが撹乱全体の時間発展を表す．したがって，振幅の増大しない撹乱成分ばかりの場合には流れは安定であり，増大していく撹乱成分が存在すれば不安定となる．

また，流体運動の数値計算においても，場所の関数である速度，圧力などの物理量をフーリエ級数あるいは他の完全直交関数系を用いた展開の形に表し，各フーリエ係数の時間発展を計算して流体運動を調べることが，しばしば行われる．このような方法は**スペクトル法**[11]と呼ばれ，比較的単純な境界条件の下での高精度の数値計算を行いたい場合，例えば周期的境界条件の下での等方性乱流の計算，熱対流運動を表す解の安定性や分岐の計算，地球大気全体の運動の計算などでよく用いられている．スペクトル法での数値計算を行う際には，離散フーリエ変換，エイリアシングなどに関する知識が必要となる．

また，流体力学に関わる実験や観測で得られる，時間的に変動する速度成分などのデータを解析する際にも，どのような振動数成分が卓越しているか，周期的な外力が働く場合の外力振動数と流体運動の振動数の関係はどのようになっているか，などを調べる際にフーリエ解析の知識は必須のものとなっている．

以上のように，フーリエ解析の理論は流体運動を調べる際の大変重要な基礎知識であり，この理論を学ぶことによって，流体の波や流れをより深く理解することが可能となる．

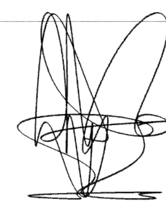
参考文献

1) 光易恒：『海洋波の物理』，岩波書店 (2002).
2) 日本流体力学会編：『流体における波動』，朝倉書店 (1989).
3) J. Lighthill: *Waves in Fluids*, Cambridge Univ. Press (1978).
4) R.S. Johnson: *A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves*, Cambridge Univ. Press (1997).
5) A.D.D. Craik: *Wave Interactions and Fluid Flows*, Cambridge Univ. Press (1985).
6) 田中光宏：波動現象の基礎知識 5，日本流体力学会誌「ながれ」，Vol.**13**, 402 (1994).
7) 船越満明：3 波共鳴，日本流体力学会誌「ながれ」，Vol.**15**, 235 (1996).
8) 田中光宏：波動現象の基礎知識 6，日本流体力学会誌「ながれ」，Vol.**13**, 483 (1994).
9) 巽友正，後藤金英：『流れの安定性理論』，産業図書 (1976).
10) 水島二郎，藤村薫（日本流体力学会編）：『流れの安定性』，朝倉書店 (2003).
11) 石岡圭一：『スペクトル法による数値計算入門』，東京大学出版会 (2004).

（ふなこし・みつあき，京都大学大学院情報学研究科）

巨大数コイン投げ問題

具体例で確率論の概念を体感し統計力学の基礎へと向かう



佐々　真一

1. はじめに

2002年10月，大学2年生を対象にした統計力学の講義で次のレポート課題を提示した．「10円玉（以下，コイン）を同時にたくさん投げる．表が出たら $+1$ 点，裏が出たら -1 点の得点にする．総得点をコインの枚数で割った1枚あたりの得点はいくらになっているか？ 実際にやってみよう.」何となく表と裏が同じ数くらいになりそうだから，1枚あたりの得点は0点からそう大きくずれない気がする．しかし，どれくらいずれているのだろうか．例えば，10枚のコインならすぐ確かめられる．1枚あたりの得点はぴったり0になるとは限らず，± 0.2 とか ± 0.4 とかにもなる．理由もなく100枚のコインを投げる人はそういないだろうから，試しに100枚くらい投げてみましょうか，というレポート課題だ．もちろん，この課題は必須ではない．楽しめる人だけやってください，と補足した．

翌週，誘いに応じてくれた数人の学生が結果を報告した．銀行で両替して1000枚のコインを投げた学生がいた．家族総出で楽しんだ学生がいた．ぴったり0点になったので，これはおかしいともう一回やってまた0点になって，絶対おかしいと思ってもう一回やってまた0点になった学生もいた．こういうイベントはずっと印象に残るので，そのときの学生たちの顔が今でも頭に浮かぶ．

この記事では，巨大数コイン投げ問題を例題に，大数の法則や大偏差原理など確率論の概念を紹介する．ただし，これらの概念を正確に記述することとは数学の教科書に委ねたい．むしろ，**特定の例題に対して具体的な計算を行うことでその概念を体得するのが物理数学の位置づけ**だとする考えに沿って解説したい．さらに，**物理数学の例題は，物理の重要な問題と関わっている**ので，個々の例題を物理学の中で新たに見直すことによって，違った角度から理解を深めるチャンスにもなっている．この記事でも，巨大数コイン投げ問題を統計力学の基礎を考える例題として扱う．予備知識として，初等的な確率と熱力学を前提にする．統計力学については，知っていても全く知らないふりをして読んで下さい．

2. やってみよう

N 枚のコインを投げよう．コインに番号をつけ，i 番目のコインの得点を σ_i と書く．k 番目のコインまで数えたときの1枚あたりの得点

$$x_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\sigma_i \tag{1}$$

を考える．$k=1$ のとき，1枚目のコインが表か裏かで，$x_1 = 1$ か $x_1 = -1$ になる．どっちになるかは全くの偶然だ．$k=10$ のとき，10番目のコインまで調べるので，x_k は10枚のコインを同時に投げたときの1枚あたりの得点だと考えても

よい．したがって，十分大きな N に対して，x_k，$(k=1,2,\cdots,N)$ の値を調べることで，投げるコインの枚数が違う場合の様子も一気に分かる．コインは1回しか投げないことに注意したい．実験を繰り返し行うときの平均を考えているわけではない．

図1に実験結果がある．$k=10$ から $k=100$ までの x_k が書かれている．k が大きくなるにつれて，得点が0に近づいているのが分かる．かつての学生のレポートのように，ぴったり $x_{100}=0$ になっているが，それは偶然であろう．実際，図2で示された $k=100$ から $k=1000$ までの結果を見ると，数値は不規則に変動している．一つのコインが表になるのか裏になるかは全くの偶然だと考えれば，この不規則な変動は当然だ．$x_{100}=0$ だからといって，$x_{1000}=0$ というわけではない（$x_{1000}=0.008$ となっている）．このあたりが体力の限界だろうが，もう少し頑張って $k=1000$ から $k=10000$ まで調べた結果が図3だ．不規則な変動を伴いつつ，後半部分で0に向かう傾向が見える．$x_{10000}=-0.0024$ なので，0からのずれは x_{1000} より小さくなっているが，そのまま単調に小さくなるわけではないだろう．さらにその先を知りたくなって，やけくそで調べた結果が，図4だ．$k=10^7$ から $k=10^8$ までの x_k が示されている．不規則でありつつ，0からの差は全体的に小さくなっている．1億枚の10円玉をどうやって投げたのか？ いや，それ以前に，そもそもそれだけの10円玉が手許にあったのか？ グラフの結果以前に素朴な疑問も生まれるが，それは気にしないで下さい．

例えば，$N=10^8$ に固定しよう．1億枚のコインを投げるときの1枚あたりの得点 x_N は，1回

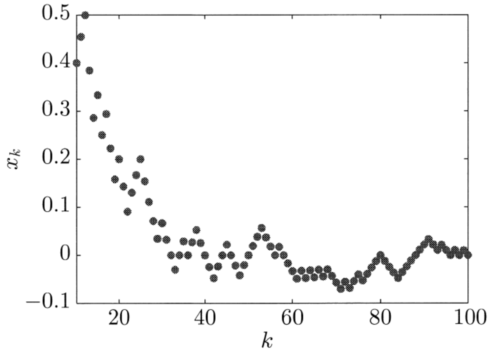


図1 k 枚目まで数えたときのコイン1枚あたりの得点．$0 \leq k \leq 100$．

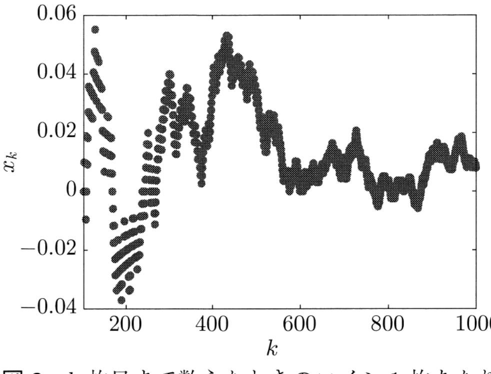


図2 k 枚目まで数えたときのコイン1枚あたりの得点．$100 \leq k \leq 1000$．

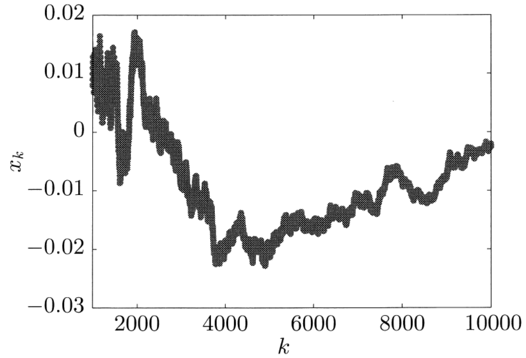


図3 k 枚目まで数えたときのコイン1枚あたりの得点．$1000 \leq k \leq 10000$．

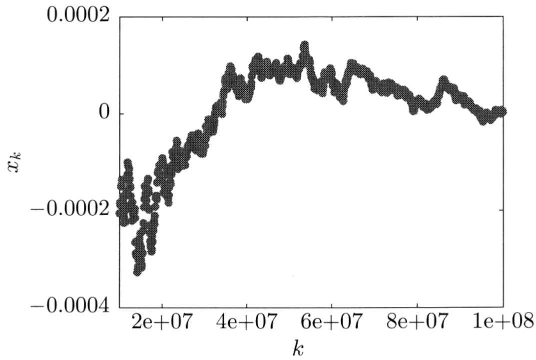


図4 k 枚目まで数えたときのコイン1枚あたりの得点．$10^7 \leq k \leq 10^8$．

の実験で分かる．この値はいくらか？ もちろん，値を当てることはできない．しかし，図 4 を見る限り，0 からのずれ $|x_N|$ が 10^{-3} を超えることはありそうもない．例えば，1 枚あたりの得点を小数点以下 4 桁を四捨五入して記録すると，$x_N = 0$ と主張してもいいように思える．その主張が正当かどうかは，誰が実験しても同じになることを見ればいい．A 君がやっても，B 君がやっても，四捨五入の規則など同じ手続きのもとで同じ結果になるなら，これは法則と言ってよい．

3. 数式で表現しよう

問題となっていることを数式で表現しよう．M 人が実験した結果を $x_N^{(1)}, x_N^{(2)}, \cdots, x_N^{(M)}$ と並べる．これらの値はばらついている．そのばらつきは，ある確率 $\mathrm{Prob}(x_N)$ に従っていると考える．「四捨五入の規則」とか「起こりそうもない」という言葉を，この確率に対して表現する．例えば，「値の精度が 10^{-3} のもとで x_N が 0 からずれている確率が 10^{-5} より小さい」という主張を得たなら，1 回の実験では x_N はほぼ 0 だと言ってよい気がする．この考えを精密化しよう．例えば，値の精度として勝手に小さい正の数字 ϵ を考えていいとする．起こり得ないと見なせる確率として勝手に小さい正の数字 δ を考えていいとする．どんなに厳しい精度 ϵ や起こりにくさの厳しい基準 δ を与えても，十分大きな N を考えることで $\mathrm{Prob}(|x_N| > \epsilon) \leq \delta$ となるなら，N が十分大きいときには $x_N = 0$ がもっともらしい．これが**大数の法則**の一つの表現だ．

今の問題では，1 枚のコインが表になるか裏になるかが等確率で起こるとして，$\mathrm{Prob}(|x_N| > \epsilon)$ を具体的に計算することができる．まず，場合の数を数えて，

$$\mathrm{Prob}(x_N = x) = 2^{-N} \frac{N!}{\frac{(1+x)N}{2}! \frac{(1-x)N}{2}!} \quad (2)$$

が分かる．x は，整数 Nx が $-N \leq Nx \leq N$ を満たす範囲で定義されている．N が十分大きいときを考えたい．そのようなとき，$f(N) \simeq g(N)$

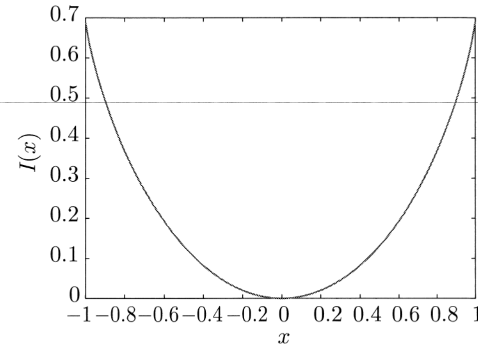


図 5 コイン投げのレート関数.

という記号をよく使う．これは，$N \to \infty$ に対して，$[\log f(N) - \log g(N)]/N \to 0$ の簡略記述で，2 つの関数 $f(N), g(N)$ について，N に関して指数関数的依存性よりゆるやかな変化を除いて等しいことを意味している．例えば，スターリングの公式 $N! \simeq N^N e^{-N}$ は，$y = \log x$ のグラフを書いて導出できる．(2) にスターリングの公式を適用して，

$$\mathrm{Prob}(x_N = x) \simeq \mathrm{e}^{-NI(x)} \quad (3)$$

を得る．ここで $I(x)$ は

$$I(x) = \frac{1+x}{2} \log(1+x) + \frac{1-x}{2} \log(1-x) \quad (4)$$

と計算される．図 5 にあるように，$I(x)$ は $I(x) \geq 0$ であり，下に凸であり，$I(0) = 0$ である．まず，$N \to \infty$ とすれば，$I(x) = 0$ となる点 $x = 0$ しか残らないことから大数の法則が直ちに分かる．さらに，(4) は，$x \neq 0$ に対して，その x が実現する確率が N とともに指数関数的に少なくなることを意味している．その少なくなる割合（レート）を与える関数が $I(x)$ である．例えば，$I(0.1) = 0.005$ なので，$N = 10^3, 10^4, 10^5$ と N を大きくするとき，$|x_N|$ が 0.1 を超える確率は，$\exp(-N/200)$ のように急激に減少する．このように，滅多に起こらない大きなゆらぎの規則を表現する (3) は大偏差性質と呼ばれる．一般に，巨大数に関する平均値の分布が大偏差性質を満たすことは**大偏差原理**[*1] と呼ばれ，議論の前提として仮定されること

*1) N が十分大きいとき，$y_N = x_N/\sqrt{N}$ は漸近的にガウス分布に従う．これは中心極限定理の例である．中心極限定理

も多い．大偏差性質を特徴づける関数 $I(x)$ は大偏差関数，レート関数，もしくは，エントロピー関数と呼ばれる．以下ではレート関数と呼ぶ．

このように，具体例で大数の法則や大偏差原理に馴染むのが物理数学の進め方だ．是非，コインを投げて，手を動かして確認して下さい．ところで，最後でさりげなく「エントロピー関数」という言葉が登場した．また，この解説の冒頭で紹介した「巨大数コイン投げを実験するレポート課題」は，統計力学の講義で出されたことを思い出そう．次に，大数の法則や大偏差原理の考えをマクロ物質のエネルギー配分問題に適用しよう．

4. エネルギー配分問題を考えよう

固体物質 A と固体物質 B を接触させて断熱箱に入れる．最初，エネルギーはそれぞれ E_{A0}, E_{B0} になっているとする．接触後，全体のエネルギーは変わらないが，エネルギー配分は変わっていく．十分時間が経った後のエネルギー配分を決めたい．

具体的に，各々の固体物質は $N=10^{23}$ 個の原子からなるとしよう．断熱箱を理想的に世界を遮断する装置と見なそう．空気や壁など A, B 以外の物質は考えない．原子の立場からは，10^{23} 個の A の原子と 10^{23} 個の B の原子があって，それらの運動を支配するハミルトニアンがある．接触前，A, B はそれぞれエネルギー E_{A0}, E_{B0} が与えられてすでに十分な時間が経っている．A と B の相互作用ハミルトニアンを ON にすることで，A と B のエネルギーのやりとりが始まる．その後，十分な時間が経った後に，相互作用パラメータを OFF[*2] にして，A と B を切り離す．切り離した後は，A, B それぞれでエネルギーは一定である．この値を E_{A}, E_{B} とする．相互作用の ON/OFF に伴う仕事は限りなく 0 に近づけられるので，その理想的状況を考えると $E_{\mathrm{A}}+E_{\mathrm{B}}=E_{\mathrm{A0}}+E_{\mathrm{B0}}$ が成り立つ．以下，$E_{\mathrm{total}}=E_{\mathrm{A0}}+E_{\mathrm{B0}}$ と書く．E_{A} が分かれば，$E_{\mathrm{B}}=E_{\mathrm{total}}-E_{\mathrm{A}}$ となっている．問題は，E_{A} の値を決めることである．最初，A の温度が B より高かったとすると，B にエネルギーを奪われて E_{A} は E_{A0} より小さくなっているだろう．この値の決まり方について何が言えるのだろうか．

話を単純化して，$\Delta E=E_{\mathrm{total}}/N$ のエネルギーの塊を A と B でやりとりすることを想像しよう．A に入っている塊の個数を N_{A} 個，B に入っている塊の個数を N_{B} 個とする．$N_{\mathrm{A}}+N_{\mathrm{B}}=N$ である．一つの塊が A に入りやすいか，B に入りやすいかは，各物質の個性によって異なるだろう．そして，それはどっちに入るかは分からない．しかし，N 個の塊のうち A に入る個数については，コインを投げたときの表の出る個数と状況が似ている．つまり，A に配分される原子 1 個あたりのエネルギー $u_N=E_{\mathrm{A}}/N$ は，A に入るエネルギーの塊の個数の割合に ΔE をかけた $(\Delta E)N_{\mathrm{A}}/N$ に等しく，巨大数コイン投げのコイン 1 枚あたりの得点 x_N に対応することが予想される．つまり，u_N の値は実験毎に異なっているだろうが，x_N の場合と同じように，ある特定の値 u_* があって，そこからずれる確率は N とともに極めて小さくなる．対象としている系のエネルギーに大数の法則が適用されると考えるのだ．

さらに，巨大数コイン投げの場合と同様に，大偏差原理を仮定する．つまり，u_N が u_* からずれた値をとる確率は N に関して指数関数的に小さくなり，

$$\mathrm{Prob}(u_N=x)\simeq \mathrm{e}^{-NI_E(x)} \tag{5}$$

と書ける．この問題のレート関数 $I_E(x)$ は，大偏差性質の一般論から $I_E(x)\geq 0$ を満たす凸関数であり，大数の法則を満たす $x=u_*$ で $I(u_*)=0$ となる．極端な場合，エネルギーがすべて B に集中することがあるかもしれない．その場合のあり得なさが $I_E(0)$ で特徴づけられている．

は大偏差性質のうち $I(x)$ の $x=0$ における曲率に着目することに相当する．

*2）例えば，相互作用の ON/OFF は，理想的な断熱仕切り壁を挿入したりはずしたりする操作を念頭に置けばよい．あるいは，A と B を遠方からゆっくり近づけて接触させたり，ゆっくり遠ざけたりすることを想像してもよい．

5. 熱力学をふりかえろう

ここまでは，マクロな系を対象にしているという設定から，大数の法則と大偏差原理を仮定しただけだ．ここで $I_E(x)$ という関数が現れたことに注意したい．十分時間が経った後は初期のエネルギー配分などに関係しないだろうから，A, B の具体名と $E_{\rm total}$ の値に応じて，その関数形が決まるはずだ．ところで，このようなエネルギー配分を決める関数は，熱力学で知られている．簡単に復習すると，次の**変分原理**が成立する．

> 物質 A, B がエネルギー $E_{\rm A}$, $E_{\rm B}$ を持っているときのエントロピーを $S_{\rm A}(E_{\rm A})$, $S_{\rm B}(E_{\rm B})$ と記す．2 つの物質を熱接触させたときのエネルギー配分は，$S_{\rm A}(E_{\rm A})+S_{\rm B}(E_{\rm total}-E_{\rm A})$ を最大にするように決まる．

$\bar{s}_{\rm A}=S_{\rm A}/N$, $\bar{s}_{\rm B}=S_{\rm B}/N$, $u_{\rm total}=E_{\rm total}/N$ とおく．この変分原理によると，関数 $-[\bar{s}_{\rm A}(x)+\bar{s}_{\rm B}(u_{\rm total}-x)]$ が最小となる $x=u_*$ が A に配分されるエネルギー密度を与える．以上により，

$$
\begin{aligned}
f(x)= \;& \bar{s}_{\rm A}(u_*)+\bar{s}_{\rm B}(u_{\rm total}-u_*) \\
& -[\bar{s}_{\rm A}(x)+\bar{s}_{\rm B}(u_{\rm total}-x)] \qquad (6)
\end{aligned}
$$

によって定義された関数 $f(x)$ は $f(x)\geq 0$ を満たす凸関数であり，$f(u_*)=0$ であることが分かる．

エネルギー配分を決める関数が独立して 2 つあることは考えにくいので，$I_E(x)$ は $f(x)$ に比例すると仮定するのが自然だ．つまり，

$$
\begin{aligned}
I_E(x)= a\{&[\bar{s}_{\rm A}(u_*)+\bar{s}_{\rm B}(u_{\rm total}-u_*)] \\
&-[\bar{s}_{\rm A}(x)+\bar{s}_{\rm B}(u_{\rm total}-x)]\} \quad (7)
\end{aligned}
$$

となる．もっとも単純に，比例係数 a は物質の種類に依存しない普遍的な定数だと仮定する．物質毎のエントロピー関数は，熱容量や圧縮率などの巨視的測定によって，実験的に決めることができる．「エネルギー配分の確からしい値からのずれの割合を決めるのは熱力学エントロピーだ」ということを (7) は主張している．これは**ゆらぎに関するアインシュタイン関係式**と呼ばれる．レート関数がエントロピー関数とも呼ばれる理由の一つだ．

6. ミクロ状態の重みを決めよう

巨大数コイン投げの場合，1 枚のコインが表になる確率を 1/2 だと仮定することで，(3) が成り立っていることを確認できて，かつ，レート関数を (4) のように計算できた．同様に，「原子が取り得る状態の確率」を仮定することで，(5) と (7) を導くことを考える．以下では，原子が取り得る状態をミクロ状態と呼ぶ．

$W_{\rm A}(x)$, $W_{\rm B}(x)$ を $W_{\rm A}(E)=\exp(aS_{\rm A}(E))$ などによって導入する．このとき，$W_{\rm B}(E_{\rm total}-u_*N)W_{\rm A}(u_*N)\simeq\sum_{x'}W_{\rm A}(x'N)W_{\rm B}(E_{\rm total}-x'N)$ に注意して，(5) と (7) より，

$$
\begin{aligned}
&{\rm Prob}(u_N=x) \\
&\simeq \frac{W_{\rm A}(xN)W_{\rm B}(E_{\rm total}-xN)}{\sum_{x'}W_{\rm A}(x'N)W_{\rm B}(E_{\rm total}-x'N)} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

を得る．これは示唆的な形だ．つまり，$W_{\rm A}(E_{\rm A})$, $W_{\rm B}(E_{\rm B})$ を物質 A, B のエネルギーが $E_{\rm A}$, $E_{\rm B}$ となる「ミクロ状態の数」とし，そのミクロ状態が等しい重みで実現すると仮定すると，(8) は自然に理解できる．この仮定が**等重率の原理**と呼ばれる．「ミクロ状態の数」という概念は量子力学を認めれば了解できるし，それに対応して古典力学の場合には相空間を分割して数えることにする．また，エントロピー $S_{\rm A}(E)$ とミクロ状態の数を結ぶ関係式 $W_{\rm A}(E)=\exp(aS_{\rm A}(E))$ を逆さまにした $S_{\rm A}(E)=a^{-1}\log W_{\rm A}(E)$ は，**ボルツマンの公式**と呼ばれる．a^{-1} がボルツマン定数であり，気体定数をアボガドロ数で割った量と一致することが分かる．

7. まとめと脱線

等重率の原理とボルツマンの公式に至る考え方を整理しよう．まず，ミクロ世界には，時間変化する様子を美しく記述する法則がある．しかし，ミクロ世界の法則だけからミクロ状態の重みを決め

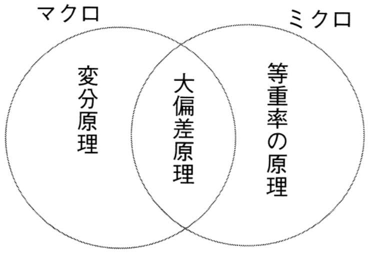


図6　3つの原理の相関図.

るのは限りなく不可能である．時間発展法則とは別に初期条件を指定する必要があり，この初期条件についての知見がないからである．そこで，ミクロ状態の重みを決めるには，マクロ世界の知見が不可欠になる．ところが，マクロ世界の熱力学は，量の定義，原理の前提，結果と測定量の関係などすべてマクロ世界の言葉で閉じている．そこで，**ミクロとマクロをつなぐ架け橋**が必要なのだ．この架け橋こそが大偏差原理である．図6に3つの原理の相関図を象徴的に記した．ミクロ世界の記述に基づいてマクロ系を考えるとき，物理量が確定している理由は大数の法則が成り立っているからに他ならない．大数の法則があるなら，確定値からのずれについての一般的規則として大偏差原理が働くだろう．他方，マクロな系では熱力学の変分原理が厳然と成立しているので，大偏差原理は熱力学変分原理と整合する形で存在するに違いない．この形を書き下したとき，ミクロ状態の重みとして，等重率の原理が自然と浮かび上がってくる．この考え方は，等重率の原理の「もっともらしさ」を自然に主張している*3)ように思える．

ただし，「もっともらしさ」の追求だけでは議論が完結しないことに注意したい．その原理が正しいかどうかは，そこから導かれる観測可能な命題の実験的検証によって判定される．その第一歩は，ゆらぎに関するアインシュタイン関係式の検証であり，アインシュタイン自身が実験を提案している．その次は，ミクロ世界の知見を踏まえて統計力学を適用することにより，マクロ世界の予言を行うことだ．この点については20世紀に大きな成功を収めた．現在のところ，等重率の原理が破綻している兆候はない．

大偏差原理が関わる問題は平衡統計力学だけではない．線形非平衡統計力学において，マクロな決定論的緩和則で観測される非自明な相反関係とミクロ力学の可逆性を結びつけたオンサーガ理論の核心部分は，大偏差原理を介したマクロとミクロの対称性を結びつけることにある．また，古典力学の変分原理と量子力学の経路確率振幅の表現はここで述べた構造と類似している（ただし，複素振幅の起源を自然に理解するのは難しいように見える）．

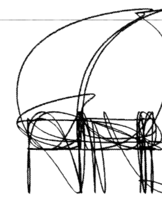
勢いにのって，様々な問題に対して，図6と類似の構造を考えたくなる．例えば，平衡状態にない系に対してミクロ状態の重みを決める原理を見出す問題はどうか？ これは理論物理の重要な未解決問題の一つであり，相当に手ごわい．この問題に対して，マクロな変分原理と大偏差原理を鍵にして理論を構築しようとするのは，自然なのだろうか，無謀なのだろうか．平衡統計力学の場合には，結果として正しいことを知っているからもっともらしいと思えるだけで，確立していない筋のもっともらしさの判断はそう簡単でないかもしれない．

物理数学としては，多数のコインを投げるときの平均得点の確率分布の漸近形を計算することが問題だった．その問題に対して，実際にやってみることから始まって，数学の概念を実践的に掴み，関連する物理の問題に思いをめぐらすと，「未解決の重要問題」にも繋がってくる．生き生きと学問を学ぶ感じが伝われば嬉しい．

（ささ・しんいち，東京大学大学院総合文化研究科）

*3)　歴史的には，ボルツマンが気体の分子運動論の考察に基づいて，ボルツマン公式に到達した．超一級の独創的研究だが，余りにも難解である．他方，統計力学を学ぶときには，等重率の原理とボルツマンの公式を前提にして，理論を体系化するのが標準的だ．ボルツマンの理論を楽しめるほどの読解力と教養がなく，結論から入る標準的議論で満足できるスマートさもない筆者にとっては，このような説明が心地よい．

ラプラス変換と揺らぎ



香取 眞理

1. はじめに

$0 \leq x < \infty$ で定義された関数 $f(x)$ と変数 s に対して積分

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \tag{1}$$

が有限に存在するとき，これを**ラプラス積分**と言う．この積分 $F(s)$ を変数 s の関数とみると，変数 x の関数である $f(x)$ から，変数 s の別の関数 $F(s)$ への変換が定義されたことになる．これを**ラプラス変換**と言う．本稿では，この変換の持つ物理的な意味を**統計力学**を題材にして考えてみたい．

ただしここでは，$f(x)$ として，半無限区間 $0 \leq x < \infty$ だけではなく実数全体 $-\infty < x < \infty$ で定義された関数であるが，ガウス関数 $f(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ のように $x \to \pm\infty$ で任意の指数関数 $e^{-\alpha|x|}, \alpha > 0$ よりもはやく零になり，積分

$$F(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{sx} f(x) dx \tag{2}$$

が有限に存在する場合を考えることにする．このとき (2) 式を $f(x)$ のラプラス変換と呼び，

$$F(s) = \mathcal{L}[f](s) \tag{3}$$

と記すことにする．

2. 内部エネルギーと温度

温度とは何であろうか．ピストン（可動な蓋）のついたシリンダー（筒状の容器）の中の気体を加熱して温度を上げる．すると気体の圧力が上昇し，ピストンを押し出すことで外に仕事をする．気体に熱を加えるとその分エネルギーが増し，外部に仕事をすることができるようになるのである．しかし気体の入った容器は加熱されたからといって全体として動き出すわけではなく，ましてや地表からの高度を増して重力ポテンシャルを増すわけでもない．気体全体の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーという力学的エネルギーは変わっていないのに，この気体に内在するエネルギーは加熱によって増すというわけで，昔の人はこの内在するエネルギーを気体の**内部エネルギー**と呼んだのである．

気体は 1 モルあたり約 6.02×10^{23}（アボガドロ定数 N_{A}）個という膨大な数の分子の集団であり，各分子はほぼ自由にランダムに空間を飛び回っている．この現代的な見方をすれば，内部エネルギーとは分子の運動エネルギーと分子間に働く斥力と引力を表すポテンシャルエネルギーの総和であり，特別なエネルギーという感じはしない．気体分子の質量 m は微小であるから（$10^{-23}\,\mathrm{g}$ のオーダーということになる），容器の内壁に衝突すれば即座に跳ね返され，速度の向きも大きさも乱される．各分子の速度ベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$

はバラバラとなり，各成分の平均は零，すなわち

$$\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle = \langle v_3 \rangle = 0 \tag{4}$$

となる．気体全体の運動量は，（容器の中の気体分子の総数を N とすると）$\boldsymbol{P} = Nm\langle \boldsymbol{v} \rangle = 0$ である．平均的には気体の流れはないので，気体全体としての運動エネルギーは零である．しかし，各分子はそれぞれ平均

$$\left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle = \frac{1}{2}m\left\{\langle v_1^2 \rangle + \langle v_2^2 \rangle + \langle v_3^2 \rangle\right\} = \frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T \tag{5}$$

の運動エネルギーを持っている．これを N 倍すると理想気体の内部エネルギーの公式が得られる．

$$U = \frac{3}{2}Nk_{\mathrm{B}}T = \frac{3}{2}\left(\frac{N}{N_{\mathrm{A}}}\right) \times (N_{\mathrm{A}}k_{\mathrm{B}}) \times T = \frac{3}{2}nRT. \tag{6}$$

ただしここで，$n = N/N_{\mathrm{A}}$ は容器内の気体のモル数，$R = 8.31$ [J/mol K] は気体定数，$k_{\mathrm{B}} = R/N_{\mathrm{A}}$ は1分子あたりの気体定数でありボルツマン定数と呼ばれる．(5) 式や (6) 式に現れる T [K] が**絶対温度**である．

実在気体の内部エネルギーを正しく見積もるには，分子間力のポテンシャルエネルギーの平均を計算しなくてはいけないが，面倒なのでここでは考えず，気体分子の速度分布に注目することにしよう．**マクスウェルの速度分布**の確率密度関数は

$$f(v_1, v_2, v_3) = \left(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}}T}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2k_{\mathrm{B}}T} = \prod_{j=1}^{3}\left\{\sqrt{\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}}T}}e^{-mv_j^2/2k_{\mathrm{B}}T}\right\} \tag{7}$$

で与えられる．つまり，気体がある一定の絶対温度 T の熱平衡状態にあるときは，気体分子の速度ベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ の 3 つの成分は各々独立で，いずれも

$$\text{平均} \quad \mu = 0, \quad \text{分散} \quad \sigma^2 = \frac{k_{\mathrm{B}}T}{m}$$

の**正規分布（ガウス分布）**$\mathcal{N}(0, k_{\mathrm{B}}T/m)$ に従う確率変数と見なしてよいということである．上述のように k_{B} はボルツマン定数と呼ばれる物理定数であり，また，気体の種類を指定すれば m も定まる．よって，分散は絶対温度 T によってのみ変化することになる．

物体の力学的なエネルギーと気体の内部エネルギーとの差は，前者では物体を作っている原子や分子のエネルギーの和の**平均値**がそのままマクロに現れるのに対して，後者では気体分子の運動は平均的には零であり，その周りの**揺らぎの大きさを表す分散**がエネルギーとしてマクロに観測されるという違いなのである．原子や分子といったミクロな存在の揺らぎを，マクロな視点において表した物理量が**温度**なのである．

■ 3. モーメントとその母関数 ■

軸を固定したコマ（剛体）の回転運動を考えよう．この場合も，コマの重心は静止しているので，コマ全体の並進運動の運動エネルギーは零，また重力ポテンシャルエネルギーも一定である．しかし回転の運動エネルギーを持ち，これは角速度 ω [rad/s] の 2 乗に比例して $I\omega^2/2$ で与えられる．回転軸を x_3 軸にとり，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ としてコマの質量分布の密度関数を $\rho(\boldsymbol{x})$ で表すと，I は

$$I = \int \rho(\boldsymbol{x})(x_1^2 + x_2^2)d\boldsymbol{x} \tag{8}$$

という積分で与えられる．ただし，$\int d\boldsymbol{x}$ は x_1, x_2, x_3 についての三重積分を表すものとする．被積分関数に $x_1^2 + x_2^2$ があることから，この積分は剛体内において質量が軸から離れて分布している（分散している）ほど大きな値となることが明らかである．同じ角速度 ω で回転しているとしても，この I の値が大きい剛体ほど，回り続けようとする**慣性**が大きく，回転を止めるためにはより大きな**力のモーメント（トルク）**を加えなければならない．I は**慣性モーメント**と呼ばれる．$\rho(\boldsymbol{x})$ だけを剛体全体にわたって積分すれば，当然その剛体の総質量 M が得られる．そこで，$\boldsymbol{x}$ の関数 $Q(\boldsymbol{x})$ に対して総質量 M で規格化した積分

$$\frac{1}{M}\int \rho(\boldsymbol{x})Q(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

を $\langle Q(\boldsymbol{x})\rangle$ と書くことにする．すると (8) 式は

$$I = M\left\{\langle x_1^2\rangle + \langle x_2^2\rangle\right\} \tag{9}$$

となる．

この表示との類似から，(5) 式に現れた速度の成分 v_j の分散 $\langle v_j^2\rangle$ を v_j の（2 次の）**モーメント**とも言うのである．一般に，実数値をとる連続な確率変数 X の確率密度関数 $p(x)$ が与えられたとき，平均値を $\mu = \langle X\rangle$ として

$$\langle (X-\mu)^k\rangle = \int (x-\mu)^k p(x)dx \tag{10}$$

を X の **k 次モーメント**（**k 次積率**）と言う．ここではこの値を m_k と書くことにする．

以下では表式を簡略化するために，平均値 $\mu=0$ の場合を考えることにしよう．正規分布 $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ の確率密度関数は

$$p^{\mathrm{G}}(x;\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-x^2/2\sigma^2} \tag{11}$$

である．これから，$k=0,1,2,\ldots$ に対して

$$\begin{aligned} m_k &= m_k^{\mathrm{G}}(\sigma^2) \\ &\equiv \begin{cases} 0 & k \text{ が奇数,} \\ (k-1)!!\sigma^k & k \text{ が偶数} \end{cases} \end{aligned} \tag{12}$$

と求められる．ただし，k が偶数であるときは，自然数 n を用いて $k=2n$ と置くことができて

$$\begin{aligned} (k-1)!! &\equiv (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1 \\ &= \frac{(2n)!}{2^n n!} \end{aligned} \tag{13}$$

となる．

1 次のモーメントと 2 次のモーメントを特に平均，分散と呼ぶのであるが，モーメントというのは 3 次以上いくらでもあり得る．これらの値の情報をどうやって整理したらよいだろうか．まず思いつくのは，表にするという方法である（表 1 を参照）．この表から m_k を k 成分とする（無限次元の）ベクトル $\boldsymbol{m} = (m_0, m_1, m_2, \ldots)$ が得られる．このベクトルと，変数 $s_k, k=0,1,2,\ldots$ を成分としたベクトル $\boldsymbol{s} = (s_0, s_1, s_2, \ldots)$ との内積 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{s}$ をとるとスカラーが得られるが，これを $s_0, s_1, s_2, \ldots$ の多変数関数

表 1　正規分布 $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ のモーメントの表．

k	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$m_k^{\mathrm{G}}(\sigma^2)$	1	0	σ^2	0	$3\,\sigma^4$	0	$15\,\sigma^6$	0	$\cdots$

$$F(s_0, s_1, s_2, \ldots) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k s_k \tag{14}$$

と見る．これを l 番目の変数 s_l で微分すれば，$m_l = \partial F/\partial s_l$ というように l 次モーメントの値が引き出せる．しかし，無限個の変数 $s_0, s_1, s_2, \ldots$ を考えるのは面倒である．そこで変数は一つだけとしてそれを s と書き，

$$s_k = \frac{s^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

としてみよう．このときの関数 F を改めて $\mathcal{M}(s)$ と書くことにすると，

$$\mathcal{M}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \frac{s^k}{k!} \tag{15}$$

となる．これはちょうど**マクローリン展開**（0 の周りの**テイラー展開**）の形をしているので，この関数から m_l の値を引き出すには

$$m_l = \left.\frac{\partial^l \mathcal{M}(s)}{\partial s^l}\right|_{s=0} \tag{16}$$

とすればよい．正規分布 $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ のモーメントの値 (12) を代入すると，(13) 式が成り立つから，具体的に

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(s) &= \mathcal{M}^{\mathrm{G}}(s;\sigma^2) \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} m_{2n}^{\mathrm{G}}(\sigma^2)\frac{s^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{s^2\sigma^2}{2}\right)^n \\ &= \exp\left(\frac{s^2\sigma^2}{2}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

と定めることができる．表 1 で与えられた情報は

この一つの関数にまとめられたことになる．これを**モーメント母関数**（**積率母関数**）と呼ぶ．『すべての次数のモーメントを孕んだ母なる関数』というわけである．

4. ラプラス変換と外場

さて，m_k は一般に (10) 式で与えられるので（ただし簡単化のため $\mu = 0$ としよう），モーメント母関数 (15) は次のように書き直せる．

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x)dx\,\frac{s^k}{k!}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(sx)^k}{k!}\right\}p(x)dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx}p(x)dx.\end{aligned} \tag{18}$$

これは確率密度関数 $p(x)$ の**ラプラス変換** (2) に他ならない．つまり

$$\mathcal{M}(s) = \mathcal{L}[p](s) \tag{19}$$

なのである．

そこで，マクスウェルの速度分布 (7) のラプラス変換を考えることにしよう．気体分子の速度はベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ であり 3 成分あるので，ラプラス変換の変数も s_1, s_2, s_3 と 3 つ用意して $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ とする．$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{3} s_j v_j$ であり，ラプラス変換は

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{s}) = \mathcal{L}[f](\boldsymbol{s}) \equiv \int e^{\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{v})d\boldsymbol{v} \tag{20}$$

で与えられる．ただし，$\int d\boldsymbol{v}$ は v_1, v_2, v_3 についての三重積分を表す．マクスウェルの速度分布 (7) は正規分布の確率密度関数 (11) の積

$$f(\boldsymbol{v}) = \prod_{j=1}^{3} p^{\mathrm{G}}\left(v_j; \frac{k_{\mathrm{B}}T}{m}\right)$$

で書ける．したがって，そのラプラス変換は各々のラプラス変換 (17) の積であり，

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\boldsymbol{s}) &= \prod_{j=1}^{3}\mathcal{L}\left[p^{\mathrm{G}}\left(\cdot; \frac{k_{\mathrm{B}}T}{m}\right)\right](s_j)\\ &= \prod_{j=1}^{3}\mathcal{M}^{\mathrm{G}}\left(s_j; \frac{k_{\mathrm{B}}T}{m}\right)\\ &= \exp\left\{\frac{k_{\mathrm{B}}T}{2m}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)\right\}\end{aligned} \tag{21}$$

となる．この母関数から，絶対温度 T の熱平衡状態にある気体の速度成分のモーメントは，任意の次数の組 (n_1, n_2, n_3) に対して

$$\begin{aligned}\left\langle\prod_{j=1}^{3} v_j^{n_j}\right\rangle &= \prod_{j=1}^{3}\left\langle v_j^{n_j}\right\rangle\\ &= \prod_{j=1}^{3}\frac{\partial^{n_j}}{\partial s_j^{n_j}}\mathcal{M}(\boldsymbol{s})\Bigg|_{s_1=s_2=s_3=0}\end{aligned} \tag{22}$$

という微分で与えられることになる．

質量 m の気体分子が速度 $\boldsymbol{v}$ で動いているときの運動エネルギーを

$$E(\boldsymbol{v}) = \frac{m|\boldsymbol{v}|^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \tag{23}$$

と書くと，マクスウェルの速度分布 (7) は

$$f(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{Z}e^{-\beta E(\boldsymbol{v})} \tag{24}$$

となる．ただし $\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ であり，Z は 1 粒子あたりの**分配関数** $Z = \int e^{-\beta E(\boldsymbol{v})}d\boldsymbol{v}$ である．これを (20) 式に代入すると

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{s}) = \frac{1}{Z}\int e^{-\beta\{E(\boldsymbol{v}) - k_{\mathrm{B}}T\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{v}\}}d\boldsymbol{v} \tag{25}$$

となる．分配関数の定義からいって当然 $\mathcal{M}(0) = 1$ であるが，$\boldsymbol{s} \neq 0$ として粒子のエネルギーを $E(\boldsymbol{v})$ から

$$E(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{s}) = E(\boldsymbol{v}) - k_{\mathrm{B}}T\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{v} \tag{26}$$

に変換すると，これに対する**ボルツマン因子** $e^{-\beta E(\boldsymbol{v},\boldsymbol{s})}$ の積分 (25) としてモーメント母関数が得られることになる．

理想気体が地上にあるとすると，その各分子にも一様な重力が働いているはずである．鉛直上向きを x_3 軸にとり，その向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ とすると，重力加速度ベクトルは $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_3$ と書ける．ただし大きさは $g = |\boldsymbol{g}| = 9.8$ [m/s^2] である．すると，質量 m

の粒子に働く重力は $\boldsymbol{F}_g = m\boldsymbol{g}$ であり，これを重力ポテンシャルとして表すと $V(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{F}_g \cdot \boldsymbol{x} = -m\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x} = mgx_3$ となる（ただし，分子の位置ベクトルを $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ とした）．高度 x_3 が高いほど重力ポテンシャル $V(\boldsymbol{x})$ も大きくなるというわけである．このポテンシャルの分も加えると，気体分子 1 個あたりの力学的なエネルギーは $E(\boldsymbol{v}) + V(\boldsymbol{x}) = E(\boldsymbol{v}) - m\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x}$ となる．次に，気体分子がそれぞれ電荷 q を持っていたとする．そこに今度は x_1 軸の正の向きに一様な電場 $\boldsymbol{E} = (E, 0, 0)$ がかけられたとする．すると各荷電粒子には $\boldsymbol{F}_E = q\boldsymbol{E}$ の力が働くことになり，これを表す静電ポテンシャルは $-\boldsymbol{F}_E \cdot \boldsymbol{x} = -q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{x} = -qEx_1$ である．さらに磁場もあり，磁束密度 $\boldsymbol{B} \neq 0$ のときは，速度 $\boldsymbol{v}$ で運動している気体分子にローレンツ力 $\boldsymbol{F}_B = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ も働く．ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いて磁束密度を $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ と表すと，ローレンツ力のポテンシャルは $-q\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}$ と書ける．これらをすべて合わせると，気体分子 1 個あたりのエネルギーは

$$E(\boldsymbol{v}) - m\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x} - q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{x} - q\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} \qquad (27)$$

となる．このように，粒子に重力場や電場や磁場といった**一様な外場**が作用すると，エネルギーに次のような構造を持った項が付け加えられるのである：

$$-(\text{係数}) \times (\text{外場}) \times (\text{変数}). \qquad (28)$$

外場が重力 $\boldsymbol{g}$ のときは係数は質量 m，それに対応する変数（これを外場に**共役**な変数と言う）は位置ベクトル $\boldsymbol{x}$，電場 $\boldsymbol{E}$ のときは係数は電荷 q，共役変数は $\boldsymbol{x}$，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ のときの係数は電荷 q，共役変数は速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ である．粒子の質量が零（$m = 0$）なら重力は作用しないし，電荷を持っていなければ（$q = 0$）電場や磁場を感じることはない．係数の m や q は外場に対する感受性を表す，粒子の基本的な属性なのである．

このことに気をつけて (26) 式を見直してみると，マクスウェルの速度分布のラプラス変換とは，

表 2 外場によるエネルギー項 (28) における対応表．

外場	係数	共役な変数
$\boldsymbol{g}$	m	$\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{E}$	q	$\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{A}$	q	$\boldsymbol{v}$
$\boldsymbol{s}$	$k_\mathrm{B}T$	$\boldsymbol{v}$

気体分子の速度 $\boldsymbol{v}$ に共役な外場 $\boldsymbol{s}$ を系に加えたことに相当することが分かる．このときの係数は $k_\mathrm{B}T$ である．この場合は外場に対する 1 つの粒子の感受性ではなく，気体という多粒子の集団全体の感受性を表す係数となっている（表 2 参照）．

5. 揺動散逸定理

粒子に外場を作用すれば動き出す．よって，粒子の集団である気体や液体といった流体は全体として流れ出すことになる．つまり，ラプラス変換とは，マクロには**静止している状態**から一様な**流れがある状態**への系の変換を意味しているといえる（図 1 参照）．

(23) 式と (26) 式より $E(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{s}) = m\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}/2 - k_\mathrm{B}T\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{v}$ であるが，これは

$$\frac{1}{2}m\left(\boldsymbol{v} - \frac{k_\mathrm{B}T}{m}\boldsymbol{s}\right)^2 - \frac{(k_\mathrm{B}T)^2}{2m}s^2$$

と平方完成できる．したがって $c = k_\mathrm{B}T/m$ とおくと，

$$e^{\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{v}} e^{-\beta E(\boldsymbol{v})} \propto e^{-m(\boldsymbol{v}-c\boldsymbol{s})^2/2k_\mathrm{B}T}$$

であることになる．確かに速度の平均値は，零から $\langle \boldsymbol{v} \rangle_s = c\boldsymbol{s}$ に変わり，流体に一様な流れが生じることが分かる．この流れは外場に比例する．そ

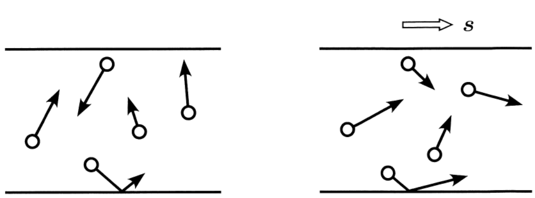


図 1 流体に外場 $\boldsymbol{s}$ を加えると流れ出す．

の比例係数 c は何かと言うと，それはマクスウェルの速度分布の分散である：

$$c = \frac{k_{\mathrm{B}}T}{m} = \sigma^2. \tag{29}$$

もともとは平均的には流れのない流体を考えていた．第 2 節で述べたように，流体全体の運動量は $\boldsymbol{P} = Nm\langle \boldsymbol{v} \rangle = 0$ であった．しかしこれに外場 $\boldsymbol{s}$ を印加すると流れが生じる．同じ流体といっても，外場をかけるとすぐにさらさらと流れるものもあるし，粘り気（**粘性**）が強くて流れにくいものもある．この流れやすさを表す比例係数 c は，外場をかけないときの流体分子の速度分布の分散 σ^2 に等しいというのである．分散 σ^2 が小さい系では，ほとんどすべての分子の運動は平均値である零に等しいということであり，分散が大きい系では，中には速度が非常に大きいものもある（ただしそのベクトルの向きはバラバラ）という状況にある．そこに外場をかけてある方向に流れやすくしてやったらどうなるか．バラバラな向きとはいっても，やはり，早く動ける粒子がもとから存在していた後者のほうが流れ出しやすいということである．

粘性が大きい流体は外場に対する**応答**が小さい．それに強い外場をかけて無理やり流すと，流体の内部摩擦（軋轢）が生じ熱が発生する．発生した熱は周囲に放射され失われてしまうため，外場をかけるのに加えたエネルギーは**散逸**していく．つまり，粘性とは散逸の大きさを表している．他方，分散 σ^2 とは揺らぎの大きさを表す量であった．分子の速度の各成分の値は，壁との衝突や粒子間衝突を繰り返すことで刻一刻と変動し，揺らいでいるのである．これを**揺動**と言う．この両者が一致するという物理法則は，統計力学において一般的に議論され，**揺動散逸定理**としてまとめられている[1]．

外場 $\boldsymbol{s}$ をかけると流体は流れ，運動量

$$\boldsymbol{P} = Nm\langle \boldsymbol{v} \rangle_s = Nk_{\mathrm{B}}T\boldsymbol{s} \tag{30}$$

を持つ．第 2 節で述べたように，内部エネルギーという何だか目には見えないエネルギーしか持っていなかった流体も，こうすればマクロな運動として観測される．その運動量 $\boldsymbol{P}$ が，流れに関与する粒子の総数 N や外場 $\boldsymbol{s}$ に比例するというのは当り前のことである．(30) 式の言っている非自明なことは唯一つである．それは，原子や分子といったミクロな存在に起因する現象がマクロに観測されるときは，その現象は絶対温度 T を用いて表されるということである．

■ 6. おわりに ■

ラプラス変換の意味を統計力学を題材にして長々と説明してみた．というのは，ラプラス変換の定義式である (1) 式や (20) 式を見ても，単に e^{-sx} とか $e^{\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{v}}$ とかいった指数関数をかけて積分するだけで，あまりイメージが湧かないというのが普通だと思ったからである．ラプラス変換とは，静止した系に外場をかけてその応答を観測することである．変換後の関数の変数 s や $\boldsymbol{s}$ は外場を表す．系の応答は外場のかけ方（その大きさや向き）によって異なるだろう．それを表すのがラプラス変換なのである．

外場を加えると系はそれに比例してずれる．バネにつながれた物体のような単純な系なら，外場をなくせば元に戻るだろう．しかし上で述べたような流体では，外場を加えたら系に流れが生じ，流れ出すと粘性のため熱が発生する．発生した熱は散逸されてしまうので，外場をなくしても系は元には戻りようがない．このような性質を**非可逆性**と言う．

ラプラス変換を用いて系を変化させその応答を見ることによって，もともとは静的であった理論に『時間の矢』を導入することが可能となるのである．

参考文献

1) 香取眞理：『非平衡統計力学』，裳華房 (1999).

（かとり・まこと，中央大学理工学部）

線形代数と量子力学

筒井　泉

1. はじめに

線形代数は理工系における基礎科目の一つであるが，その恩恵は物理学において顕著で，とりわけ量子力学の理論的構成の根幹をなしている．量子力学は相対論と並んで現代物理学の基盤であり，物理学は科学全般の基礎をなすものであるから，現代科学はその根柢において線形代数に支えられていると言えるかもしれない．

量子力学は1920年代半ばの完成以来，原子や素粒子の極微な世界の記述から固体等の物質の性質の理解に大きな成功を収めたが，90年代からは量子情報や量子通信などの発展に触発されて，その理論的基礎の研究が非常に活発になっている．その結果，量子力学に援用される数学的技法も新しくなっており，今後もその傾向は強くなるものと思われる．本稿では，量子力学における線形代数の根幹的役割について簡単に述べた後，新しい時代の要請の中から量子もつれに関連する基礎的な事項をいくつか紹介することにしよう．

2. 量子状態と線形性

量子力学では，対象とする物理系の量子状態は複素線形空間のベクトル $|\psi\rangle$ として表され，物理量の測定結果によって定まる．これは，2つの量子状態を $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ とすれば，その足し合わせ*1)

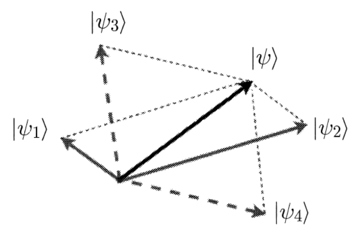


図1　量子状態 $|\psi\rangle$ はベクトルとして異なる分解 $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle = |\psi_3\rangle + |\psi_4\rangle$ が可能であり，対応する物理的性質の解釈も異なる．

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle \tag{1}$$

に対応する量子的な状態が存在するという単純な観測事実に基づくものであり，ここに量子力学における線形性の基盤がある．

量子状態の線形性は幾つかの重要な物理的結果をもたらすが，その一つは波動現象で見られる干渉効果である．またベクトルの分解の任意性から，後述の統計的解釈に基づいて同じ状態に異なる物理的解釈を与えることができ（図1参照），これらの性質から量子力学における波動と粒子の二重性や不確定性関係，相補性などの特徴が導かれるのである[1]．なお，量子状態 $|\psi\rangle$ の時間的な変化は，ベクトル $|\psi\rangle$ に対するユニタリー行列 $U(t)$ による線形変換 $|\psi\rangle \to U(t)|\psi\rangle$ で表される．これは線形変換なので，例えば(1)で分解される状

*1)　ベクトル記号は数学での $\vec{\psi}$ の代わりに量子力学では $|\psi\rangle$ を使うことが多く，内積も $\vec{\psi}_1 \cdot \vec{\psi}_2$ の代わりに $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$ と書かれる（ディラックの記法）．また，本稿では記述の簡明さのため，ベクトルの規格化定数因子は省いてある．

態 $|\psi\rangle$ に対する時間発展は

$$U|\psi\rangle = U|\psi_1\rangle + U|\psi_2\rangle \quad (2)$$

となり，量子状態の線形性は時間発展の下でも維持される．

3. 物理量と測定値

量子力学における物理量はエルミート行列 A で表され，その測定結果は行列 A の固有値のうちのどれかであるとする．この規則から，（行列の次元が無限大のときを除いて）一般に物理量の測定値 a_i は離散的（$i=1,2,3,\ldots$）となる．物理量がエルミート行列であることは，測定値が実数になることと，固有状態がベクトル全体のなす線形空間 $\mathcal{H}$ の正規直交基底となる**完全性**を保証する．すなわち，$|\psi_i\rangle$ を固有値 a_i を持つエルミート行列 A の固有状態

$$A|\psi_i\rangle = a_i|\psi_i\rangle, \quad i=1,2,3,\ldots \quad (3)$$

とするならば，任意の状態 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ を固有状態の線形結合

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i|\psi_i\rangle \quad (4)$$

の形に展開可能である．固有状態を規格直交条件 $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}$ を満たすように選べば，展開係数は $c_i = \langle\psi_i|\psi\rangle$ で与えられる．なお，固有状態 $|\psi_i\rangle$ の完全性は“単位の分割”と呼ばれる等式

$$\sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = I \quad (5)$$

（I は単位行列）と同等である．これより，

$$\sum_i |c_i|^2 = \sum_i \langle\psi|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle \quad (6)$$

が導かれるから，規格化状態（$\langle\psi|\psi\rangle = 1$ を満たす $|\psi\rangle$）の場合には，非負の実数量

$$\Pr(A=a_i) = |c_i|^2 \quad (7)$$

を“状態 $|\psi_i\rangle$ が固有値 a_i を持つ確率”と定義すれば，全体の和は

$$\sum_i \Pr(A=a_i) = \sum_i |c_i|^2 = 1 \quad (8)$$

となって確率として解釈可能であることが示される．なお，もし状態 $|\psi\rangle$ の展開 (4) を他の物理量 B の固有状態を用いて行えば，その展開係数はその固有値 b_i を得る確率（振幅）を与えるものとなる．状態の分解の仕方によって，その分解に用いられた物理量に特有な解釈が可能になるのである．

さてエルミート行列 A の状態ベクトル $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ への作用を，単位の分割 (5) を用いて書き直せば

$$A|\psi\rangle = \sum_i a_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi\rangle \quad (9)$$

となる．$|\psi\rangle$ の任意性よりこれは

$$A = \sum_i a_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (10)$$

を意味するが，これが A の**スペクトル分解**である．ところで，適当な基底系のベクトル $|\phi_i\rangle$ の系を選んで A の行列成分を

$$A_{ij} = \langle\phi_i|A|\phi_j\rangle \quad (11)$$

と定めることにより，その基底系での行列表示が得られる．スペクトル分解 (10) を用いると

$$A_{ij} = \sum_k \langle\phi_i|\psi_k\rangle a_k \langle\psi_k|\phi_j\rangle \quad (12)$$

となるが，これは成分 $S_{ij} = \langle\phi_i|\psi_j\rangle$ を持つユニタリー行列 S と対角行列 $D_{ij} = a_i\delta_{ij}$ を用いたエルミート行列 A の対角化

$$A = SDS^\dagger \quad (13)$$

（$S^\dagger$ は S のエルミート共役行列）に他ならない．基底系として A の固有状態を選べば，その行列表示は対角行列 D のみとなる．

さて任意の規格化状態 $|\psi\rangle$ に対して物理量 A を測定したときに得られる期待値 $\langle A\rangle_\psi$ は，測定結果 a_i とそれを得る確率 $\Pr(A=a_i)$ を掛けて和を取れば良いから，(7) と (10) を用いて

$$\langle A\rangle_\psi = \sum_i a_i \Pr(A=a_i) = \langle\psi|A|\psi\rangle \quad (14)$$

を得る．量子力学における物理量の測定結果の統計的解釈の基礎はここにある．

以上，量子力学における線形代数の役割を，状態，時間発展，物理量と統計的解釈の観点から簡単に述べた．このように量子力学の理論的構成の根幹は線形代数にあるが，量子的な複合系を考察した場合には，この線形性が物理的にも数学的にもさらに興味深い状況を生み出すことになる．その代表的な例が，近年の量子情報科学で中心的な研究対象になっている量子もつれである．

4. 量子もつれ（Quantum Entanglement）

系が複数の部分系からなる複合系の場合には，一般に量子論特有の相関が生じる．これを見るのに，簡単のため全系が 2 つの部分系 1，2 からなる場合を考えよう．各部分系の状態が同時に $|\alpha\rangle_1$，$|\beta\rangle_2$ にあるとき，全系の状態を

$$|\Psi_1\rangle = |\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2 \tag{15}$$

と書き表し，**直積状態**と呼ぶ．同様に各部分系がそれぞれ別の状態 $|\xi\rangle_1$，$|\eta\rangle_2$ にあるとき，全系の状態は別の直積状態 $|\Psi_2\rangle = |\xi\rangle_1|\eta\rangle_2$ で表される．すると状態の重ね合わせによって

$$|\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle + |\Psi_2\rangle = |\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2 + |\xi\rangle_1|\eta\rangle_2 \tag{16}$$

も再び全系の状態を表すが，各部分系の 2 状態が直交するときには測定結果は排他的になるので，系 1 が $|\alpha\rangle_1$ のときには系 2 は必ず $|\beta\rangle_2$，反対に系 1 が $|\xi\rangle_1$ のときは系 2 は必ず $|\eta\rangle_2$ という意味で，部分系の間に完全相関があることになる．このように 2 つ以上の直積状態の和の形にしか書けない複合系の状態は，**量子もつれ**（エンタングル）状態と呼ばれる．

各部分系の独立な基底ベクトルの数を n とすれば全体の状態全空間は $\mathbb{C}^n$ であり，2 つの部分系からなる複合系の状態空間はそれらのテンソル積空間 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n^2}$ で与えられる．すなわち．複合系の任意の状態 $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ は，各々の部分系の基底ベクトル $|\psi_i\rangle_1$，$|\phi_j\rangle_2$，$i, j = 1, \ldots, n$ と適当な係数 c_{ij} を用いて

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}|\psi_i\rangle_1|\phi_j\rangle_2 \tag{17}$$

と展開できる．展開する基底系によって (17) の右辺の線形和の形が項数も含めて変化するから，状態 (17) が量子もつれ状態であるかどうかの判定には，基底の選択に依らない方法が必要になる．

その一つに，行列の**極分解**を用いる方法がある．これは任意の複素数の極分解 $z = r\,e^{i\theta}$ と同様に，任意の行列 C を

$$C = UP = RV \tag{18}$$

という形に分解するもので，$C = UP$ を右分解，$C = RV$ を左分解と言う．ここで P，R は C およびその共役行列 $C^\dagger$ から

$$P = \sqrt{C^\dagger C}, \quad R = \sqrt{CC^\dagger} \tag{19}$$

で与えられるが，行列の積 $C^\dagger C$, $CC^\dagger$ はエルミート行列であり，それらの固有値は半正値定符号（正または零）となるから，その固有値の平方根を固有値とする P，R もまた半正値定符号のエルミート行列になる．一方，U，V はユニタリー行列であり，C が逆行列を持つならば P，R も逆を持つからその場合は (18) を逆に解いて $U = CP^{-1}$，$V = R^{-1}C$ となる．ここで例えば右分解のエルミート行列 P をスペクトル分解 $P = S^\dagger DS$ し，さらに $T = US^\dagger$ と置けば，(18) より

$$C = TDS \tag{20}$$

を得る．これは任意の行列を 2 種類のユニタリー行列 S, T および半正値定対角行列 D を用いて分解することができることを示しており，行列 C の**特異値分解**（singular value decomposition）と呼ばれている．行列 C がエルミートの場合は，この分解は対角行列による分解 (13) と等しい．

さていま，状態 (17) の展開にある係数 c_{ij} を行列 C の成分と見て，これに上の特異値分解 (20) を施そう．すなわち，t_{ij}，s_{ij} および $d_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$ をそれぞれ T, S, D の行列成分とすれば (20) によって

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}\lambda_k s_{kj} \tag{21}$$

となるが，これを (17) に代入し，各部分系の新しい基底ベクトル $|\alpha_k\rangle_1 = \sum_i t_{ik}|\psi_i\rangle_1$，$|\beta_k\rangle_2 = \sum_j s_{kj}|\phi_j\rangle_2$ を用いれば，状態 $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ を

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\alpha_k\rangle_1 |\beta_k\rangle_2 \tag{22}$$

という形に展開することができることになる．この分解は**シュミット分解**（Schmidt decomposition）と呼ばれ，量子もつれを含め量子状態の基本的な性質の分類に非常に有用である．一般的なベクトル空間内の基底による展開 (17) では項数は最大で n^2 であるが，シュミット分解 (22) においては項数が最大 n になっていることに注意したい．

特異値分解 (20) における D の半正値定性よりシュミット分解 (22) における係数 λ_k は非負 $\lambda_k \geq 0$ であり，また全系の状態 $|\Psi\rangle$ の規格条件 $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$ より，$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = 1$ を満足する．λ_k は**シュミット係数**と呼ばれ，またシュミット分解に現れる（$\lambda_k \neq 0$ となる）項の数を**シュミット階数**（Schmidt rank）と呼ぶ．ひとたび全系の状態をシュミット分解しておけば，明らかに部分系へのユニタリー変換の下でシュミット係数やシュミット階数は変わらないから，これらは基底に独立な状態に関する情報を与える．これより，系の量子もつれの判定は状態 $|\Psi\rangle$ のシュミット階数が 1 であるかどうかを調べれば良いことになる．またシュミット階数の大きさを量子もつれの程度を表す**量子もつれ測度**として採用することもできる．さらに LOCC と呼ばれる量子情報科学で標準的に用いられる操作の範囲では，2 つの状態のシュミット係数のある種の順序付けによって，状態変化の可否が決まることが知られている．

なお，2 つの部分系の次元が等しくない場合にも同様の展開が可能であり，その場合のシュミット階数の最大値は部分系の次元の小さなほうで与えられる．一方，全系が 3 つ以上の部分系からなる場合には，一般にはこのような状態分解はできない．すなわち，N 個の部分系からなる全系の状態を，各部分系の基底の積

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j,\ldots,k} c_{ij\cdots k} |\psi_i\rangle_1 |\phi_j\rangle_2 \cdots |\xi_k\rangle_N \tag{23}$$

の形に展開したとき，$c_{ij\cdots k} \neq 0$ となる係数の数 r が，必ずしも各部分系の（最小の）次元以下になるような基底は存在しない．しかしながら，そのような場合でも 2 体系のシュミット階数に倣った量子もつれ測度を，展開 (23) に必要な最小の項数 $r_{\min}$ を用いて $\log_2 r_{\min}$ によって定義することは可能である[2]．

5. 同種粒子の量子もつれ

量子もつれの相関に関する実験は，光子や電子，中間子等の粒子系を用いて行われることが多い．これらの系ではその粒子の統計性に従って粒子の入れ替えに対して対称または反対称状態のみが許されるから，同種粒子の量子もつれの考察にはこれらの対称性を考慮に入れる必要がある．

例えば 2 個の電子からなる複合系において $k = 1, 2$ を部分系の番号としたとき，我々の銀河系において系 k のスピンの z 成分が上向きである状態を $|\uparrow, G\rangle_k$，また 230 万光年の彼方のアンドロメダ銀河において系 k のスピンの z 成分が下向きである状態を $|\downarrow, A\rangle_k$ で表すことにしよう．測定によってそれぞれの銀河に指定されたスピンの z 成分を持つ電子の存在が確認できたとしても，粒子の同一性によってどちらの系の電子だったかは不明なので，複合系の状態は，

$$|\Psi\rangle = |\uparrow, G\rangle_1 |\downarrow, A\rangle_2 - |\downarrow, A\rangle_1 |\uparrow, G\rangle_2 \tag{24}$$

と書き表される．これは (15) のような直積状態ではないが，上のような各銀河系でのスピンの測定結果からは 2 つの電子の間の相関は決して見えない．同種粒子系の場合は，(24) のような直積状態の反対称化状態は，必ずしも量子もつれ状態として判定できないのである．

このような同種粒子の複合系の量子もつれの判定には幾つかの方法が提案されているが，その一

つに電子のようなフェルミ粒子系の場合に適用できる，以下の対角化の手法がある．まず，2 体のフェルミ粒子の任意の状態 $|\Psi\rangle$ を各部分系の基底ベクトル $|\psi_i\rangle_k$ $(k=1,2)$ と係数 f_{ij} を用いて[*2)]

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}|\psi_i\rangle_1|\psi_j\rangle_2 \tag{25}$$

と書き表す．"異種粒子" の場合 (4) との違いは，粒子の入れ替え $1 \leftrightarrow 2$ の下での反対称性のため，係数行列が反対称 $f_{ij}=-f_{ji}$ になっている点である．

さて任意の $n\times n$ 反対称行列 F は，適当なユニタリー行列 W を用いて

$$F = W^{\mathrm{t}} Z W \tag{26}$$

（W^{t} は W の転置行列）の形に分解できる．但し，

$$Z = \mathrm{diag}\,[Z_0, Z_1, \ldots, Z_m] \tag{27}$$

で，$Z_0=0$ は $(n-2m)\times(n-2m)$ 零行列，残りは z_i を零でない複素数としてそれぞれ

$$Z_i = \begin{pmatrix} 0 & z_i \\ -z_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i=1,\ldots,m \tag{28}$$

となる m 個の 2×2 行列である．

反対称行列 F の成分を (25) における係数 f_{ij} として分解 (26) を適用しよう．ユニタリー行列 W の成分を w_{ij} とし，系 1，2 において新しい基底ベクトル $|\xi_i\rangle_k = \sum_j w_{ij}|\psi_j\rangle_k$ $(k=1,\,2)$ を用いて (25) を書き直せば

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{m} z_i\left(|\xi_q\rangle_1|\xi_{q+1}\rangle_2 - |\xi_{q+1}\rangle_1|\xi_q\rangle_2\right), \quad q = n-2m+2i-1 \tag{29}$$

という形になる．この分解はちょうど前の異種粒子の場合のシュミット分解 (22) に対応し，**スレーター分解**（Slater decomposition）と呼ばれ，また展開に現れる項の数 m は**スレーター階数**（Slater rank）と呼ばれる．スレーター階数 $m=1$ の場合には (24) と同じ直積状態の反対称化状態になり，そのようなフェルミ 2 粒子系の量子状態は量子もつれしていないと判定される[3)]．

シュミット分解のときと同様に，フェルミ粒子系の場合のスレーター分解も 2 部分系への分解にのみ適用可能であり，多粒子系の任意の部分系への分解の判定には使えない．また，ボーズ粒子系の場合はフェルミ粒子系よりもさらに複雑な要素が存在し，より多くの未解決問題が残されている．

6. フェルミ粒子系の量子相関

同種粒子の N 体系の 2 部分系への分解性，および N 個の 1 体系への完全分解性の判定には，物理量の実在性の概念に基づく条件を用いることもできる[4)]．この規準は部分系の間の量子相関の有無と密接に関係し，さらにフェルミ粒子系の場合は，比較的簡単に任意の部分系（複数の粒子を含む）への分解可能性への一般化が可能である[5)]．

この説明のため，まず簡単な 2 部分系の量子もつれのない (29) の $m=1$ 状態に戻ろう．各部分系 $k=1,2$ で互いに直交する状態 $|\psi_1\rangle_k$, $|\psi_2\rangle_k$ $({}_k\langle\psi_1|\psi_2\rangle_k=0)$ を適当に選び，個々の粒子状態についての反対称化操作を $\mathcal{A}$ で表せば，$m=1$ 状態は "直交する直積状態の反対称化状態"

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle &= |\psi_1\rangle_1|\psi_2\rangle_2 - |\psi_2\rangle_1|\psi_1\rangle_2 \\ &= \mathcal{A}\left[|\psi_1\rangle_1|\psi_2\rangle_2\right]\end{aligned} \tag{30}$$

に書くことができる．さて一般の N 体のフェルミ粒子系の場合には，粒子の同一性より粒子数のみで部分系が定まるから，粒子系の番号 $1,2,\ldots,N$ の分割を交わらない集合の族 $\Gamma=\{\Gamma_1,\ldots,\Gamma_s\}$ で

$$\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\cdots\cup\Gamma_s = \{1,2,\ldots,N\} \tag{31}$$

となるものを用いて，全系の s 個の部分系への任意の分割を指定できる．これに付随して，1 粒子の状態空間 $\mathbb{C}^n$（の内部）の直和分解

$$V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s \subseteq \mathbb{C}^n \tag{32}$$

で，$\dim V_k$ が部分系 Γ_k に属する粒子数より大き

---

*2) 同種粒子の入れ替えを定義するため，部分系の間に対応付けられた基底 $|\psi_i\rangle_1 \leftrightarrow |\psi_i\rangle_2$ を用いる．

い部分空間の族 $V=\{V_1,\ldots,V_s\}$ を導入しよう．部分系 Γ_k の状態空間 $\mathcal{H}_k$ を，V_k のなす（Γ_k に所属する粒子数分の）テンソル積空間の反対称部分空間とすれば，各部分系の状態 $|\psi_k\rangle_k\in\mathcal{H}_k$ の直積状態から作られる反対称化状態

$$|\Psi\rangle=\mathcal{A}\left[|\psi_1\rangle_1|\psi_2\rangle_2\cdots|\psi_s\rangle_s\right] \tag{33}$$

は，状態の直交性を含めて2部分系の場合の状態(30)の直接的な一般化を与えることになる．

部分系への分割 Γ と直交分解 V の下で定義された状態(33)の集合を $S(\Gamma,V)$ と書くことにし，そのような状態 $|\Psi\rangle\in S(\Gamma,V)$ への物理量の組を，再び分割 Γ と直交分解 V を用いて

$$O=\mathcal{A}\left(O_1\otimes O_2\otimes\cdots\otimes O_s\right)\mathcal{A} \tag{34}$$

で与える．ここで O_k は部分系 Γ_k の状態空間 $\mathcal{H}_k$ 上の任意の物理量を表すエルミート行列で，両側の $\mathcal{A}$ は，O を完全反対称化された全系の空間 $\mathcal{H}$ 上のエルミート行列とするためのものである．すると任意の2状態 $|\Psi\rangle,|\Phi\rangle\in S(\Gamma,V)$ に対して，O の行列要素（弱測定量）は，

$$\frac{\langle\Phi|O|\Psi\rangle}{\langle\Phi|\Psi\rangle}=\prod_{k=1}^{s}\frac{{}_k\langle\phi_k|O_k|\psi_k\rangle_k}{{}_k\langle\phi_k|\psi_k\rangle_k} \tag{35}$$

を満たすことが示される．つまり，$S(\Gamma,V)$ に属する状態の組に対しては物理量 O は部分系の物理量の積に分解し，部分系間の量子相関は存在しないことがわかる．

量子相関が消失する物理量(34)は，互いに直交性を持つ部分系の物理量 O_k からなる．前述の例(24)では，部分系の物理量の一つは銀河系内でのスピン，もう一つはアンドロメダ銀河でのスピンであって，これらは位置の局所性によって直交する空間上の物理量である．この場合，同種粒子ではあるが位置の測定によりスピン測定結果を2つに分別できるが，同様に一般の場合も，各部分系の物理量 O_k の直交性により測定結果の分別が可能になる．裏返せば，そうでない物理量に対しては状態(33)の下でも量子相関が生じることになる．重要なことは，部分系への分解(35)の意味での量子相関の消失は，(Γ,V) というペアの指定の下で初めて定まる性質であることである．量子相関の消失がどのような状態の組合せに対して成立するかについても注意が必要であり，例えば分解可能性についての推移律は一般に成立しない（図2参照）．

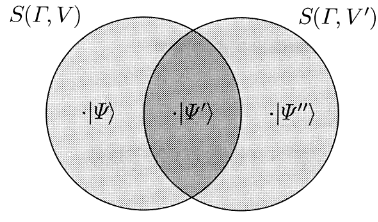


図2　状態 $|\Psi\rangle,|\Psi'\rangle\in S(\Gamma,V)$ および $|\Psi'\rangle,|\Psi''\rangle\in S(\Gamma,V')$ の組が個別に分解可能でも，$|\Psi\rangle$ と $|\Psi''\rangle$ が分解可能だとは限らない．

7. 終わりに

量子力学の基礎的要請としての状態の重ね合わせ，確率解釈，物理量と測定値等の基本概念から量子相関の分析に至るまで，線形代数は量子力学の幅広い問題において中心的な役割を担っている．2体系ではシュミット分解のような簡単な概念が有力な道具になっているが，多体系の量子もつれを取り扱うための手法は未だに十分に開発されていない．量子力学は量子情報の著しい発展によって90年代以降，面目を新たにしており，多くの未解決の重要問題を生み出しつつある．今後も線形代数を中心とした数学の新しい技法が，これらの問題に解決をもたらしていくものと思われる．

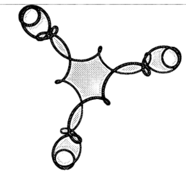
参考文献

1) 筒井 泉，数理科学 2009年2月号，7頁．
2) 量子もつれ測度についての最近の報告は，例えば R. Horodecki, *et al., Rev. Mod. Phys.* **81** (2009) 865–942.
3) J. Schliemann, *et al., Phys. Rev. A* **64** (2001) 022303.
4) G.-C. Ghirardi, L. Marinatto and T. Weber, *J. Stat. Phys.* **108** (2002) 49.
5) T. Ichikawa, T. Sasaki and I. Tsutsui, arXiv: quant-ph/0910.1658.

（つつい・いずみ，
高エネルギー加速器研究機構・素粒子原子核研究所）

対称性

量子力学と群・代数の表現論



小竹　悟

1. はじめに—物理と対称性—

対称性は現代物理学の基礎的概念の一つである．考えている対象にある操作を施したときにその対象が変わらない場合，その操作を**対称操作**と言い，この系には対称性があると言う．例えば，正三角形の板は中心の回りに120度回転すると元と同じ状態に戻るので（図1），120度の回転対称性がある．さらに表裏を区別しないのであれば，中線に関して180度回転しても不変であり，これらの対称操作は D_3 と呼ばれる群（正二面体群）をなしている．**群**とは，集合 G に積が定義されていて $(G \times G \to G : (a,b) \mapsto ab)$,

(i) 結合則：$\forall a,b,c \in G, (ab)c = a(bc)$,

(ii) 単位元：$\exists e \in G, \forall a \in G, ae = ea = a$,

(iii) 逆元：$\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G,$
$aa^{-1} = a^{-1}a = e$

の条件が満たされている場合に，積の規則を抽象的に捉えた代数構造のことである．この簡単な定義から想像できないほどに，群には豊富な内容が含まれている．量子力学の黎明期には分子の電子状態や振動モードを扱う問題等に群論が応用され，グルッペンペスト（Gruppen Pest，群論のペスト）という言葉が生まれるほどの大流行であった．分子の問題では，分子の形を保つ対称操作のなす群（点群）の表現論を用いることで波動関数の形がどのようになるべきかをおさえられるので（それは分子を構成している原子の種類に依らずに分子の形だけで定まる），解析が非常に容易になるのである．対称性の議論の利点の一つは，このように**対称性を表す群や代数の表現論を用いることにより，系の詳細に依らない普遍的な性質を議論できる**点である．

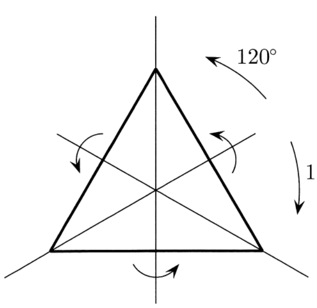


図1　正三角形の板の合同変換．

模型（理論）を調べて対称性を見つけて解析に利用するだけでなく，流れを逆転して対称性を出発点にすることも考えられる．特殊相対性理論，一般相対性理論，ゲージ理論はそれぞれローレンツ変換，一般座標変換，ゲージ変換の下での不変性を要請して得られる理論である．もちろん，対称性だけですべてが決まるわけではなく，特殊相対性理論では光速度不変の原理，一般相対性理論では等価原理といった物理的に重要なインプットも必要である．対称性の議論のもう一つの利点は，このように**対称性を理論構築の指導原理として用いることができる**点である．

本稿では，対称性が群や代数の表現として物理

系に現れてくることを，角運動量を中心として簡単な例を通して見ていく．

2. 対称性，保存則，量子力学

保存則は対称性と密接に関係している．例えば，エネルギー，運動量，角運動量の保存則は時間や空間の一様性・等方性という観点から理解できる：

保存則	対称性
エネルギー保存則	時間の一様性
運動量保存則	空間の一様性
角運動量保存則	空間の等方性

これを見るには解析力学で学ぶ**ネーターの定理**，「連続パラメータを含む変換で作用が不変ならば，運動方程式の下で，保存量（保存カレント）が存在する」を用いればよい．式で書くと，変換

$$\begin{cases} q'(t') = q(t) + \Delta q(t) \\ t' = t + \delta t(t) \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} \Delta q, \delta t \text{ は} \\ \text{微小量} \end{pmatrix} \tag{1}$$

の下で作用が不変ならば，運動方程式 $\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0\right)$ の下で，保存則 $\frac{d}{dt}\Theta = 0$ が成り立つ．ここで保存量 Θ は

$$\Theta = \sum_j \delta q^j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} + \delta t\, L = \sum_j \Delta q^j\, p_j - \delta t\, H \tag{2}$$

で与えられ，$\delta q(t) = q'(t) - q(t)$ は関数形の変化を表す．さらにこの保存量が変換を引き起こす生成元になっている．無限小変換であることを明示するために $\Theta = \varepsilon Q$（ε は微小量．パラメータが複数ある場合には $\Theta = \sum_a \varepsilon_a Q_a$）と書いておく．$\Delta q$ が q のみの関数として，上の変換 (1) は

$$q'(t) = q(t) + \frac{i}{\hbar}[\varepsilon Q, q(t)] \tag{3}$$

のように保存量で生成されている．運動量も $p'(t) = p(t) + \frac{i}{\hbar}[\varepsilon Q, p(t)]$ と変換させればこれは**正準変換**である．古典論では交換子をポアッソン括弧にすればよい．

角運動量保存則について見てみよう．例えば $L = \sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{\vec{x}}_j^2 - \sum_{j<k} V_{jk}(|\vec{x}_j - \vec{x}_k|)$ ならば，

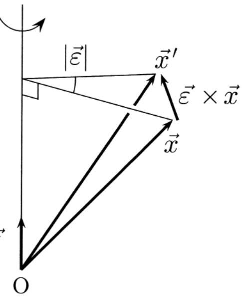


図 2　無限小回転．

時間を変えずに ($t' = t$)，空間の回転 $\vec{x}' = R(\vec{\theta})\vec{x}$（回転軸が $\vec{\theta}$ の向きで回転角が $|\theta|$ の回転を表す1次変換が $R(\vec{\theta})$）を行う変換に対して，L は不変なので作用が不変となる．無限小回転を考えると（図 2）

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{\varepsilon} \times \vec{x} \tag{4}$$

となり，この場合の保存量は (2) より $\Theta = \sum_j (\vec{\varepsilon} \times \vec{x}_j) \cdot m_j \dot{\vec{x}}_j = \sum_j \vec{\varepsilon} \cdot (\vec{x}_j \times m_j \dot{\vec{x}}_j) = \vec{\varepsilon} \cdot \sum_j \vec{x}_j \times \vec{p}_j$，つまり (全) 角運動量 $\vec{L} = \sum_j \vec{x}_j \times \vec{p}_j$ が保存する．

波動関数 ψ の変換の様子を見てみると，波動関数はスカラー量なので，変換後の波動関数は元の位置での元の波動関数の値を持ってくればよい：$\psi'(t', \vec{x}') = \psi(t, \vec{x})$．回転 $\vec{x}' = R(\vec{\theta})\vec{x}$ の場合には，$R(\vec{\theta})^{-1} = R(-\vec{\theta})$ であるから，これを書き換えて $\psi'(t, \vec{x}) = \psi(t, R(-\vec{\theta})\vec{x})$ となる．定数ベクトル $\vec{a}$ と角運動量 $\vec{L} = -i\hbar\vec{x} \times \vec{\nabla}$ の内積を $\vec{x}$ にかけると $\frac{i}{\hbar}(\vec{a} \cdot \vec{L})\vec{x} = \vec{a} \times \vec{x}$ となるので，無限小変換 (4) は $\vec{x}' = \vec{x} + \frac{i}{\hbar}(\vec{\varepsilon} \cdot \vec{L})\vec{x} = \left(1 + \frac{i}{\hbar}\vec{\varepsilon} \cdot \vec{L}\right)\vec{x} = R(\vec{\varepsilon})\vec{x}$ と書き直される．有限の回転は無限小の回転を積み重ねて得られるので，

$$R(\vec{\theta}) = \lim_{N\to\infty} R\left(\frac{1}{N}\vec{\theta}\right)^N = \lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{\frac{i}{\hbar}\vec{\theta} \cdot \vec{L}}{N}\right)^N = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\theta} \cdot \vec{L}} \tag{5}$$

を得る*1)．よって回転は $\vec{x}' = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\theta} \cdot \vec{L}}\vec{x}$，変換後の波動関数は $\psi'(t, \vec{x}) = \psi(t, e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\theta} \cdot \vec{L}}\vec{x}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\theta} \cdot \vec{L}}\psi(t, \vec{x})$ と表される．ここで $\vec{L}$ は波動関数の引数の $\vec{x}$ に働く微分演算子 $\vec{L} = -i\hbar\vec{x} \times \vec{\nabla}$

*1)　正方行列 (線型変換) の指数関数は $\exp A \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ と定義され，$e^A \stackrel{\text{def}}{=} \exp A$ と略記する．

として表されていた．

式 (3) は**ハイゼンベルグ表示**での式であり，$\vec{L}=\vec{x}\times\vec{p}$ と $[x_j,p_k]=i\hbar\delta_{jk}$ を用いれば $\frac{i}{\hbar}[\vec{\varepsilon}\cdot\vec{L},\vec{x}]=\vec{\varepsilon}\times\vec{x}$ を得るので確かに正しい．無限小変換の式を $\vec{x}'=\vec{x}+\frac{i}{\hbar}[\vec{\varepsilon}\cdot\vec{L},\vec{x}]=e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\varepsilon}\cdot\vec{L}}\vec{x}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\varepsilon}\cdot\vec{L}}$ と書き換えると，有限の変換はこれを積み重ねて得られるので $\vec{x}'=e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\theta}\cdot\vec{L}}\vec{x}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\theta}\cdot\vec{L}}$ という表式を得る．

対称変換を表すユニタリ変換を U（または上で見た連続変換の対称性の生成元を Q）とすると，

$$[H,U]=0 \quad (\text{or } [H,Q]=0) \tag{6}$$

である．互いに交換するので H と U(or Q) は**同時対角化可能**である．**エネルギー縮退**との関係を見てみよう．エネルギー固有状態 $|\psi\rangle$（$H|\psi\rangle=E|\psi\rangle$）に対して，$U|\psi\rangle$（or $Q|\psi\rangle$）は同じエネルギーの固有空間に属する状態である：$HU|\psi\rangle=UH|\psi\rangle=UE|\psi\rangle=EU|\psi\rangle$．$U|\psi\rangle$ が $|\psi\rangle$ と 1 次独立な状態であれば，エネルギー縮退が生じていることになる．U（or Q, Q^a）をさらにかけても同様に同じエネルギー固有空間に属し，このようにして得られる 1 次独立な状態たちは多重項を形成する．一般にエネルギー縮退が起きている場合にはその背後に何らかの対称性が潜んでいると期待される．そのような理由のないエネルギー縮退は偶然縮退と呼ばれる．

3. 群・代数の表現

群には要素の数が有限個の有限群と無限個の無限群があり，後者で要素が連続パラメータで指定される場合は**連続群**と呼ばれる．物理に登場する連続群は**リー群**（特に一般線型群の閉部分群である線型リー群）と呼ばれるものである．リー群 G の単位元近傍の様子を表すものが**リー代数** $\mathfrak{g}$ で，集合としては $\mathfrak{g}=\{X\,|\,e^{itX}\in G\ (\forall t\in\mathbb{R})\}$ と定義され（数学では $X\to -iX$ として $e^{tX}\in G$ とするのが普通），演算として和と実スカラー倍*2) と**交換子積**（$[A,B]=AB-BA$）が定義された代数構造である．大雑把に言ってリー群とリー代数の関係は

リー代数 ： 無限小変換 X
リー群 ： 有限の変換 e^{iX}

という感じである（式 (5) 参照）．無限小変換よりも有限の変換のほうが扱いが大変というだけでなく，リー群は多様体という構造を持ちその大域的な性質は色々面倒なことがあるので（例えば e^{iX} の積の形に表せない元がある），リー群はリー代数よりも難しい．

群や代数は抽象的に定義された代数的構造を持つ対象だが，それを行列に対応させて表そうというのが表現であり，**群や代数は物理系の中に表現として現れてくる**．群や代数の**表現** (ρ,V) とは，ベクトル空間 V を一つ決めて，群や代数の要素に対して V 上の線型変換を対応させるもので（その対応の写像が ρ），群では積を保ち（$\rho(ab)=\rho(a)\rho(b)$），リー代数では交換子積を保つ（$\rho([X,Y])=[\rho(X),\rho(Y)]$）ものである．$V$ は**表現空間**と呼ばれ，基底 $\{|i\rangle\}$ を一つ決めれば線型変換 $\mathcal{A}$ は行列 $A=(A_{ij})$ として表される：$\mathcal{A}|j\rangle=\sum_i|i\rangle A_{ij}$．$\rho(a)$ や $\rho(X)$ を行列で表したものは**表現行列**と呼ばれ，V の次元を**表現の次元**と言う．群や代数の作用に対して非自明な不変部分空間が存在しないとき，つまり基底を取り替えても次数の低い行列に帰着しない場合には**既約表現**と言う．例えばユニタリ行列を表現行列とする群の**ユニタリ表現**は既約表現の直和に分解されるので，既約表現が基本となる．

リー群の大域的に面倒な点を気にしなければ（$SU(n)$*3) のような単連結な群ではそのような面倒な点はない），リー群の表現とリー代数の表現には 1 対 1 の関係があることが分かっているので，より簡単なリー代数の表現を調べれば十分である．リー代数の表現行列が分かったら，その指数関数を考えることでリー群の表現行列が得られる．

---

*2) リー代数によっては複素スカラー倍も定義される．例えば n 次特殊線型群 $SL(n,\mathbb{C})=\{A: n\times n \text{ 複素行列}\,|\,\det A=1\}$ のリー代数 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ は複素リー代数．

*3) n 次ユニタリ群は $U(n)=\{A: n\times n \text{ 複素行列}\,|\,A^\dagger A=1_n\}$ で，行列式が 1 の行列に限った群が特殊ユニタリ群 $SU(n)$．リー代数はそれぞれ $\mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{su}(n)$．

4. 水素原子

水素原子の量子力学は，量子力学の発展・応用上重要であっただけではなく，厳密に解けることと角運動量の量子化が現れることで量子力学を学ぶ上で大切な例である．そのハミルトニアンは

$$H=\frac{1}{2\mu}\vec{p}^2-\frac{A}{r}, \quad A=\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \tag{7}$$

である（μ は換算質量）．すなわち，中心力なので角運動量 $\vec{L}$ が保存する．シュレディンガー方程式 $H\phi(\vec{x})=E\phi(\vec{x})$ は極座標 (r,θ,φ) に移って変数分離の方法で解けて，解は 3 つの量子数 n,l,m $(n=1,2,\ldots;\ l=0,1,\ldots,n-1;\ m=-l,-l+1,\ldots,l)$ で指定され，

$$\phi(\vec{x})=\phi_{n,l,m}(r,\theta,\varphi)=R_{n,l}(r)Y_{l,m}(\theta,\varphi) \tag{8}$$

という形に表される．エネルギーは主量子数 n にのみ依存し，$E=E_n=-\frac{\mu A^2}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$，$n^2$ 重の縮退がある．磁気量子数 m に関する縮退は回転不変性に起因するもので，角運動量保存則に対応する．例えば z 軸方向に磁場をかけると，この縮退は解けてしまう．方位量子数 l に関する縮退は，幾何学的対称性によるものではなく，$\frac{1}{r}$ ポテンシャルという力の法則に起因するものなので**動力学的対称性**と呼ばれる．これにはルンゲ–レンツベクトルという保存するベクトル量が対応しており，角運動量と合わせて代数の表現論を用いることにより，シュレディンガー方程式を直接解くことなしにエネルギー固有値を縮退度まで込めて求めることができる[1]．

角運動量 $\vec{\ell}=\frac{1}{\hbar}\vec{L}=-i\vec{x}\times\vec{\nabla}$ は θ と φ のみで表され，球面調和関数 $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ にかけると

$$\vec{\ell}^2Y_{l,m}=l(l+1)Y_{l,m},\quad \ell^3Y_{l,m}=mY_{l,m},$$
$$\ell^{\pm}Y_{l,m}=\sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)}\,Y_{l,m\pm1} \tag{9}$$

となる（$\ell^{\pm}\stackrel{\rm def}{=}\ell^1\pm i\ell^2$）．これは回転群 $SO(3)$*4)（のリー代数 $\mathfrak{so}(3)\cong\mathfrak{su}(2)$）のスピン l 表現である．シュレディンガー方程式を解くことで回転群のスピン l 表現が自然と現れてきたが，一般的にリー代数 $\mathfrak{su}(2)$ の既約表現は**スピン j 表現**となることが示される．$\mathfrak{su}(2)$ の生成元を $\vec{J}$ とすると，その交換関係は

$$[J^a,J^b]=if^{abc}J^c \tag{10}$$

である．ここで構造定数は $f^{abc}=\varepsilon^{abc}$ であり，繰り返された添字 c については和を取っている．基底を取り替えて $J^{\pm}\stackrel{\rm def}{=}J^1\pm iJ^2$ とおくと，上の交換関係は

$$[J^3,J^{\pm}]=\pm J^{\pm},\quad [J^+,J^-]=2J^3 \tag{11}$$

となる．表現空間の基底として J^3 を対角化したものを選んでおく．式 (11) の第 1 式より，$J^3|m\rangle=m|m\rangle\Rightarrow J^3J^{\pm}|m\rangle=(m\pm1)J^{\pm}|m\rangle$ となるので，$J^{\pm}$ は J^3 の固有値を ±1 だけ変える演算子である．J^3 の最大固有値状態を $|j\rangle$ とすると，これは J^+ をかけると消える状態であり，J^- を次々にかけると新しい状態が出てくる．しかし表現空間が有限次元とするとどこかで消される必要があり，それを $(J^-)^{n+1}|j\rangle=0$ とすると，規格化定数まで丁寧に計算してやると $n=2j$ が結論される．こうして得られる $n+1=2j+1$ 次元表現がスピン j 表現 $\left(j=\frac{n}{2}=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\ldots\right)$ である．基底を改めて $|j,m\rangle$ と書くと

$$\vec{J}^2|j,m\rangle=j(j+1)|j,m\rangle,\quad J^3|j,m\rangle=m|j,m\rangle$$
$$J^{\pm}|j,m\rangle=\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,|j,m\pm1\rangle \tag{12}$$

であり，式 (9) は実際この形をしていた．スピン j 表現の**指標**は，表現空間を $V_{(2j)}$ と書くことにして，

$$\chi_j(\theta)\stackrel{\rm def}{=}{\rm Tr}_{V_{(2j)}}e^{i\theta J^3}=\sum_m e^{i\theta m}=\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} \tag{13}$$

で与えられる．ランクの高いリー代数に対しても，同時対角化できるもの（J^3 に相当）を対角化した基底を選び，上げる演算子（J^+ に相当）のすべてで消される状態（**最高重み状態**．$|j,j\rangle$ に相当）を出発点にして，下げる演算子（J^- に相当）を

*4)　n 次直交群は $O(n)=\{A: n\times n$ 実行列 $|\,{}^tAA=1_n\}$ で，行列式が 1 の行列に限った群が特殊直交群（回転群）$SO(n)$．リー代数はそれぞれ $\mathfrak{o}(n),\mathfrak{so}(n)$ で，$\mathfrak{o}(n)=\mathfrak{so}(n)$．

次々とかけて新しい状態を作っていくという方法で表現が得られる．

リー代数の複素化について少し述べておく．量子力学は“複素数の世界”なので i 倍して線型結合を取り $J^{\pm}$ という演算子を考えることに何ら問題はない．しかし，リー代数という観点から述べると，リー代数は“実数の世界”に住んでおり，$\mathfrak{su}(2)$ など一般には i 倍することは許されない．それでは $J^{\pm}$ は一体何をやっているのかと言うと，リー代数の複素化という手続きを行っているのである．複素化とは，実数2つから複素数を作ったのと同様に，実リー代数2つ分を考えて複素スカラー倍が許されるようにしたものである．例えば $\mathfrak{su}(2)$ の複素化は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ である．元の実リー代数と複素化したリー代数の複素既約表現の間には1対1の対応があるので，いったん複素化して考えておいて最後に実数の世界に戻って来ればよいのである．

5. 調和振動子

調和振動子は比較的易しく厳密に解けることで量子力学の諸概念を理解する際に大切であるだけでなく，生成消滅演算子という概念が場の量子論へと受け継がれていくという点で，量子力学の中で最も重要な例である．調和振動子のハミルトニアンは

$$H=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2 \tag{14}$$

である．この形を変えない変換で一目で分かるものはパリティ変換 $P: x\to -x\ \ (p\to -p)$ である．この対称性 $[H,P]=0$ から H と P は同時対角化できるので，$H\phi(x)=E\phi(x)$ の解は偶関数または奇関数に選ぶことができる．さらに1次元束縛系には縮退がないので，波動関数は偶関数または奇関数となることが分かる．シュレディンガー方程式を解く方法は色々あるが，生成消滅演算子を用いる方法が簡明だし後々の応用上も重要である．**生成消滅演算子**

$$a\stackrel{\mathrm{def}}{=}\frac{ip+m\omega x}{\sqrt{2m\hbar\omega}},\quad a^{\dagger}=\frac{-ip+m\omega x}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \tag{15}$$

を導入すると（$[a,a^{\dagger}]=1$），ハミルトニアンは

$$H=\hbar\omega\left(a^{\dagger}a+\frac{1}{2}\right) \tag{16}$$

となる．この形を変えない変換は，位相変換

$$a'=e^{i\theta}a\ \ (\theta\in\mathbb{R})\ (\Rightarrow a'^{\dagger}=a^{\dagger}e^{-i\theta}) \tag{17}$$

である．この変換がなす群は $U(1)$ であり，元の x と p で見ると正準変換になっている．座標と運動量の1次変換 $\binom{p'}{x'}=\begin{pmatrix}\alpha&\gamma\\ \beta&\delta\end{pmatrix}\binom{p}{x}$ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R})$ が正準変換となるのは，$\alpha\delta-\gamma\beta=1$ の場合であり，この変換がなす群は $Sp(2,\mathbb{R})$ である*5)．式(17)の $U(1)$ はこの $Sp(2,\mathbb{R})$ の部分群になっている．この $U(1)$ に属さない $Sp(2,\mathbb{R})$ の正準変換を生成消滅演算子の言葉に直すと，a と $a^{\dagger}$ を混ぜる変換（一般にそのような変換はボゴリューボフ変換と呼ばれる）になっている．基底状態 $|0\rangle$ は a で消される状態 $a|0\rangle=0$ であり，これに $a^{\dagger}$ を作用させて励起状態 $|n\rangle$ が得られる（$n=0,1,2,\ldots$）：

$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right),\quad |n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}a^{\dagger\,n}|0\rangle. \tag{18}$$

波動関数 $\phi_n(x)=\langle x|n\rangle$ はエルミートの多項式を用いて書き表され，確かに偶関数・奇関数となっている．ヒルベルト空間は**フォック空間** $F=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathbb{C}\,|n\rangle$ と呼ばれる．調和振動子の**分配関数**は

$$Z_1=\mathrm{Tr}_F e^{-\beta H}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\beta E_n}=\frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} \tag{19}$$

と計算される．上で述べた対称性 $U(1)$ の生成元（つまり $\mathfrak{u}(1)$ の基底）は $J=a^{\dagger}a$ と表され，これは**数演算子**そのものである．ハミルトニアンは $H=\hbar\omega\left(J+\frac{1}{2}\right)$ と表され，$q=e^{-\beta\hbar\omega}$ とおくと，

$$q^{-\frac{1}{2}}Z_1=\mathrm{Tr}_F q^J=\frac{1}{1-q} \tag{20}$$

となる．$\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+q^3+\cdots$ は $|0\rangle$ に $1,a^{\dagger},a^{\dagger\,2},a^{\dagger\,3},\ldots$ をかけた状態に対応する．

独立な調和振動子2つからなる系を考えると，エネルギー固有値は $E_{n_1,n_2}=\hbar\omega_1\left(n_1+\frac{1}{2}\right)+\hbar\omega_2\left(n_2+\frac{1}{2}\right)$ となり（$n_1,n_2=0,1,2,\ldots$），ω_1 と ω_2 の比が無理数の場合には縮退は生じない．比が1以外の有理数の場合には所々に縮退が生じ

*5) $Sp(2n,\mathbb{R})=\left\{A: 2n\times 2n \text{ 実行列}\ \middle|\ {}^tAJA=J, J\stackrel{\mathrm{def}}{=}\begin{pmatrix}0&1_n\\-1_n&0\end{pmatrix}\right\}$ は $2n$ 次シンプレクティック群（斜交群）．

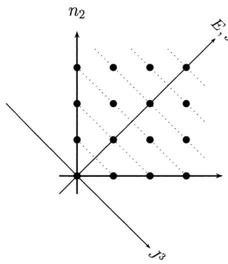


図 3 2 次元等方的調和振動子の量子数.

るが，これは偶然縮退である．$\omega_1 = \omega_2$ の場合には（$\omega_1 = \omega_2 = \omega$ とする），

$$E_{n_1,n_2} = \hbar\omega\left(n_1 + n_2 + \frac{1}{2}\times 2\right) \qquad (21)$$

となり，$E = \hbar\omega(n+1)$ には $n+1$ 重の縮退がある（図 3）．以下ではこれを詳しく見ていこう．$m_1 = m_2 = m$ として，等方的 2 次元調和振動子のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2 + \frac{1}{2m}p_2^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_2^2 \qquad (22)$$

である．この形を変えない変換で一目で分かるものは独立なパリティ変換 $x_i \to -x_i$（$p_i \to -p_i$）と粒子の入れ替え $x_1 \leftrightarrow x_2$（$p_1 \leftrightarrow p_2$）である．ベクトルの記法 $\vec{x} = \binom{x_1}{x_2}, \vec{p} = \binom{p_1}{p_2}$ を用いると

$$H = \frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2} + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{x}^{\,2} \qquad (23)$$

となり，一目で分かるこの形を変えない変換は

$$\vec{x}\,' = A\vec{x} \ \ \big(A \in O(2)\big)\ (\Rightarrow \vec{p}\,' = {}^t\!A^{-1}\vec{p} = A\vec{p}) \qquad (24)$$

である．$O(2)$ の主要部分の $SO(2)$ は**可換群**であり，可換群の既約表現は 1 次元表現となるため，この対称性ではエネルギー縮退は説明できない．生成消滅演算子

$$[a_j, a_k^\dagger] = \delta_{jk}, \quad [a_j, a_k] = [a_j^\dagger, a_k^\dagger] = 0 \qquad (25)$$

を導入すると，ベクトルの記法 $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$ を用いて

$$H = \hbar\omega\left(\vec{a}^{\,\dagger}\vec{a} + \frac{1}{2}\times 2\right) \qquad (26)$$

となり，この形を変えない変換は

$$\vec{a}\,' = A\vec{a} \ \ \big(A \in U(2)\big)\ \ (\Rightarrow \vec{a}\,'^{\dagger} = \vec{a}^{\,\dagger}A^\dagger) \qquad (27)$$

である．$U(2) = U(1)\times SU(2)$ であり，この $SU(2)$ 部分群がエネルギー縮退を説明してくれる．座標と運動量の 1 次変換 $\binom{\vec{p}\,'}{\vec{x}\,'} = {}^t\!A\binom{\vec{p}}{\vec{x}}$（$A$ は 4×4 実行列）が正準変換となるのは A が $Sp(4,\mathbb{R})$ に属する場合で，上の $U(2)$ はこの $Sp(4,\mathbb{R})$ の部分群であり，生成消滅演算子の構造を変えないものである．

フォック空間は $F = \bigoplus_{n_1,n_2=0}^{\infty}\mathbb{C}\,|n_1,n_2\rangle$, $|n_1,n_2\rangle = \frac{a_1^{\dagger\,n_1}}{\sqrt{n_1!}}\frac{a_2^{\dagger\,n_2}}{\sqrt{n_2!}}\,|\mathbf{0}\rangle$ （$a_1|\mathbf{0}\rangle = a_2|\mathbf{0}\rangle = 0$）で，$F$ 上で $U(2)$ のリー代数 $\mathfrak{u}(2) = \mathfrak{u}(1)\oplus\mathfrak{su}(2)$ は

$$\mathfrak{u}(1):\ J = \vec{a}^{\dagger}1_2\vec{a} = a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2, \qquad (28)$$

$$\mathfrak{su}(2):\ J^a = \vec{a}^{\dagger}\frac{\sigma^a}{2}\,\vec{a}\ \ (\sigma^a\text{: パウリ行列}) \qquad (29)$$

と実現される．2×2 行列 A に対して

$$J_A = \vec{a}^{\dagger}A\vec{a} \qquad (30)$$

とおくと，交換関係 (25) を用いて

$$[J_A, J_B] = J_{[A,B]} \qquad (31)$$

となることが容易に確認できる．これを用いれば

$$[J, J^a] = 0, \quad [J^a, J^b] = if^{abc}J^c \qquad (32)$$

となり（今の場合 $f^{abc} = \varepsilon^{abc}$），確かに $\mathfrak{u}(2)$ が実現されている．

フォック空間の状態をリー代数 $\mathfrak{u}(2)$ を用いて分類してみよう．$\mathfrak{u}(1)$ 部分の J は $H = \hbar\omega(J+1)$ であるからエネルギーに対応する．$\mathfrak{su}(2)$ 部分は，$[H, J^a] = 0$ であるから，その表現がエネルギー縮退に対応しているはずである．基底 $|n_1,n_2\rangle$ は既に J^3 が対角化されており，$J = n$ となる固有空間（つまりエネルギーが $\hbar\omega(n+1)$）内の J^3 の最大固有値状態は $|n,0\rangle$ で，J^- をかけることで，

$$0 \xleftarrow{J^+} |n,0\rangle \xrightarrow{J^-} |n-1,1\rangle \xrightarrow{J^-} |n-2,2\rangle \xrightarrow{J^-} \cdots \xrightarrow{J^-} |0,n\rangle \xrightarrow{J^-} 0$$

となる（比例係数は省略した）．つまり $n+1$ 個の状態 $|n_1,n_2\rangle$ $(n_1+n_2=n)$ が $\mathfrak{su}(2)$ の $n+1$

次元既約表現（スピン $\frac{n}{2}$ 表現）の基底になっている．これがエネルギーの $n+1$ 重縮退の出所であった．

分配関数を考えてみると $Z_2 = \mathrm{Tr}_F e^{-\beta H} = Z_1^2$ となるが，式 (20) に対応して

$$q^{-\frac{1}{2}\times 2} Z_2 = \mathrm{Tr}_F q^J = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad (33)$$

と書かれる．$[J, J^3] = 0$ であったから同時対角化可能で，J の値だけではなく J^3 の値も同時に指定した，より詳しい分配関数（指標）が考えられ ($z = e^{i\theta}$)，

$$\mathrm{Tr}_F q^J e^{i\theta J^3} = \frac{1}{(1-qz^{\frac{1}{2}})(1-qz^{-\frac{1}{2}})} \qquad (34)$$

と計算される．なぜなら，右辺を展開すると $\left(1+qz^{\frac{1}{2}}+\left(qz^{\frac{1}{2}}\right)^2+\cdots\right)\times\left(1+qz^{-\frac{1}{2}}+\left(qz^{-\frac{1}{2}}\right)^2+\cdots\right)$ であるが，1 つ目の括弧は $1, a_1^\dagger, a_1^{\dagger\,2}, \ldots$ を，2 つ目の括弧は $1, a_2^\dagger, a_2^{\dagger\,2}, \ldots$ を $|\mathbf{0}\rangle$ にかけたものからくる寄与を表しており，展開するとすべての $|n_1, n_2\rangle$ からの寄与をもらさず 1 回ずつ取り入れられるからである．式 (34) はフォック空間という表現空間での $\mathfrak{u}(2)$ の指標であるが，それを $\mathfrak{su}(2)$ の既約指標 (13) で分解することができる．実際，式 (34) の右辺は

$$\begin{aligned} &\sum_{n_1=0}^{\infty}\left(qz^{\frac{1}{2}}\right)^{n_1}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left(qz^{-\frac{1}{2}}\right)^{n_2} \\ &= \sum_{n_1,n_2=0}^{\infty} q^{n_1+n_2} z^{\frac{n_1-n_2}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n \sum_{n_2=0}^{n} z^{\frac{n}{2}-n_2} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \chi_{\frac{n}{2}}(\theta) \qquad (35) \end{aligned}$$

と書き直される．これはフォック空間が $\mathfrak{su}(2)$ で

$$F = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_{(n)} \qquad (36)$$

と既約分解されることを意味し（さらにスピン $\frac{n}{2}$ 表現の持つ $U(1)$ チャージが n であることを意味する），前段落で述べた結果と一致する．

6. おわりに

5 節では等方的 2 次元調和振動子を考察したが，これは N 次元に容易に拡張される．エネルギー固有値は $E_{n_1,\ldots,n_N} = \hbar\omega(n_1+\cdots+n_N+\frac{1}{2}\times N)$ で，$E = \hbar\omega(n+\frac{1}{2}\times N)$ には ${}_N H_n = {}_{N+n-1}C_n$ 重の縮退がある．N 個の生成消滅演算子 (25) によりハミルトニアンは式 (26) と表され（ただし $\times 2$ の部分は $\times N$ とする），$U(N)$ 対称性が存在し，これがエネルギー縮退を説明してくれる．この場合に現れる $\mathfrak{su}(N)$ の既約表現は n 階対称テンソル表現で（その表現空間を $V_{(n)}$ と書こう），その次元はちょうど ${}_{N+n-1}C_n$ である．フォック空間は式 (36) の形に分解され，状態を詳しく調べる方法 ($a_1^{\dagger\,n}|\mathbf{0}\rangle$ が最高重み状態となる) でも，指標を用いる方法（フォック空間の指標は式 (34) のように簡単な積の形に書ける）でも確認できる．交換関係 (25) の代わりに反交換関係 ($\{A, B\} = AB+BA$) に従うフェルミオン的な振動子を考えても式 (31) が成立し，同様な議論ができてこの場合は $\mathfrak{su}(N)$ の n 階反対称テンソル表現が現れる．

調和振動子 a_i を用いてリー代数の生成元 J^a を実現する方法 (30) は，a_i を自由場（調和振動子の無限個の集まり）に，J^a をカレントの場に "昇格" させることができて，カレント代数（**アファインリー代数**）と呼ばれる無限次元代数の実現を与えてくれる．このように抽象的で難しい対象を自由場という性質がよく分かったものを用いて調べる方法は**自由場表示の方法**と呼ばれ，物理屋にとっては大変便利な方法であり，様々な無限次元代数や可解格子模型の解析などに用いられて威力を発揮している．

素粒子理論や数理物理ではリー群・リー代数は不可欠な道具である．興味を持たれた読者は文献 2) 辺りから学ばれてみては如何であろうか．

参考文献

1) 島和久：数理科学 1969 年 12 月号；国場敦夫：数理科学 2007 年 7 月号．
2) 窪田高弘：『物理のためのリー群とリー代数』，サイエンス社，2008; H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics, 2nd ed.*, Westview Press, 1999.

（おだけ・さとる，信州大学理学部）

グリーン関数と波動方程式

量子力学，場の理論とともに



静谷　謙一

1. はじめに

17 世紀から 19 世紀にかけて光は粒子か波動か，科学者の間で論争があった．水中の光速が空気中より遅いことが実測されて光の波動説に軍配が上がったように見えたが，20 世紀になって黒体放射や光電効果の解釈から光の粒子性が再認識された．その後，量子論の発見・発展の中で電子のような "粒子" も光も**粒子/波動の二面性**をもつ**量子**（的な波動）として理解できることが明らかになった．したがって物質を支配する基礎方程式はすべて波動方程式となる．本稿では量子論の枠組みの中で境界値問題として波動方程式の解法を考察しながら，量子論からどのような物質観が得られるか，解説してみたい．

2. 波動方程式

量子力学では電子のような "粒子" をシュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{x},t) = H(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{p}})\,\psi(\boldsymbol{x},t) \qquad (1)$$

に従う波動と考える．波の複素振幅 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ を波動関数と呼ぶ．ハミルトニアン H は一般に座標 $\boldsymbol{x}$ と運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar\nabla_{\boldsymbol{x}}$ の関数であり，質量 m の自由粒子については $H = \hat{\boldsymbol{p}}^2/(2m)$ となる．以下では主にこの自由粒子の場合を考えよう．

まず波動方程式の構造に注目しよう．(1) 式は $\psi(\boldsymbol{x},t)$ について斉次の方程式であるので，解の**重ね合わせ**の原理が成り立つ．つまり独立な解をすべて集めたものが一般解となる．運動量が $\boldsymbol{p}$ でエネルギーが $E_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}^2/(2m)$ となる平面波 $e^{-iE_{\boldsymbol{p}}t+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$ は明らかに波動方程式の解である．（通常平面波は完全系をなすと考えるので，）一般解は平面波の重ね合わせとして表すことができる*1)：

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = \sum_{\boldsymbol{p}} e^{-iE_{\boldsymbol{p}}t+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\,a_{\boldsymbol{p}}. \qquad (2)$$

複素振幅の運動量分布 $\{a_{\boldsymbol{p}}\}$ を指定すると，波動関数 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ が決まることになる．

一方，(1) 式は時間 t について一階の微分方程式であるので，ある時刻 t' の振幅（の空間分布）$\psi(\boldsymbol{x}',t')$ を与えると任意の時刻の振幅 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ が一意的に決まる．つまり**ホイヘンスの原理**に習い，次のように書ける：

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = \sum_{\boldsymbol{x}'} i\,G(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t')\,\psi(\boldsymbol{x}',t'). \qquad (3)$$

時間・空間の一様性から $G(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x}',t')$ は $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$ と $t-t'$ の関数となるので $G(x-x')$ と略記しよう．（x は $(\boldsymbol{x},t)$ を表す．）実際の表式は

$$i\,G(x-x') = \sum_{\boldsymbol{p}} e^{-iE_{\boldsymbol{p}}(t-t')+i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} \qquad (4)$$

*1) 以下では自然単位系を用いて $\hbar = 1$ とする．また，微分記号を $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ と略記し，空間積分を $\sum_{\boldsymbol{x}} \equiv \int d^3\boldsymbol{x}$，運動量空間の積分を $\sum_{\boldsymbol{p}} \equiv \int d^3\boldsymbol{p}/(2\pi)^3$ と表記する．

と与えられる．(4) 式を (3) 式に代入してみると，積分 $\sum_{\boldsymbol{x}'}$ はフーリエ変換として $\psi(\boldsymbol{x}',t')$ の中から運動量 $\boldsymbol{p}$ の成分 $a_{\boldsymbol{p}}$ を取り出す働きをすることから直ちに (2) 式と (3) 式は同じ内容であることが分かる[*2]．

$t>t'$ のとき (3) 式は $\psi(\boldsymbol{x}',t')$ が時間発展して $\psi(\boldsymbol{x},t)$ となる様子を表している．$t'>t$ の場合にも (3) 式は数式として意味をなすが，もちろんこれは時刻 t' の波動 $\psi(\boldsymbol{x}',t')$ が因果律を破って過去の状態 $\psi(\boldsymbol{x},t)$ に向かって時間発展していくという意味ではない．単に，時間 t' に $\psi(\boldsymbol{x}',t')$ となる波動は過去の時刻 t においては $\psi(\boldsymbol{x},t)$ という状態にあったということを表すに過ぎない．これは (2) 式が波動の因果律にかなった伝搬を表すことから明らかである．

原因なくして結果はない．自然界の現象の時間発展は必ず**因果律**に従う（英語では causal と表現する）はずである．そこで，$G(x-x')$ から $t-t'>0$ の causal な伝搬の部分を取り出してみよう．つまり $t<t'$ ではゼロで，$t>t'$ では $G(x-x')$ に一致する関数 $G^{\mathrm{ret}}(x-x')$ を考える．$t<0$ で 0, $t>0$ で 1 となる階段関数 $\theta(t)$ を用いると，$G^{\mathrm{ret}}(x-x')=\theta(t-t')\,G(x-x')$ とも書ける．この関数を $\tau\equiv t-t'>0$ についてフーリエ変換してみよう（その意図は後ほど分かる）．計算には $\int_0^\infty d\tau e^{i\omega\tau}\,e^{-iE_{\boldsymbol{p}}\tau}=i/(\omega-E_{\boldsymbol{p}})$ を使う．ただし，ここで $\tau\sim\infty$ のところで積分が収束するように，フーリエ変数 ω（実数）に微小な正の虚部を与えて（つまり $\omega\to\omega+i\epsilon$; $\epsilon>0$ として）積分を実行した．したがって，答えは

$$G^{\mathrm{ret}}(x-x')=\sum_{\omega,\boldsymbol{p}}\frac{e^{-i\omega\,(t-t')+i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}}{\omega-E_{\boldsymbol{p}}+i\epsilon}\qquad(5)$$

となる（ここ以降，計算途中ではフーリエ変換が意味を持つように $\epsilon>0$ を保ち，最終結果で $\epsilon\to+0$ とする．これを “$i\epsilon$ 処方” と呼ぶ）．ω についての積分は複素平面上の留数計算に帰着される．図 1 から $t>t'$ でのみ (4) 式が再現できることが見て取れるであろう．

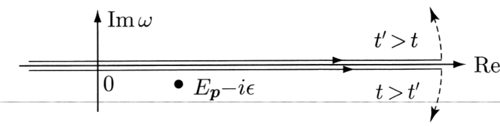


図 1　$i\epsilon$ 処方．

この $G^{\mathrm{ret}}(x-x')$ に $(i\partial_t-H)$ を作用させると，

$$(i\partial_t-H)_x G^{\mathrm{ret}}(x-x')=\delta(t-t')\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\quad(6)$$

となる[*3]．$G(x-x')$ は斉次方程式 $(i\partial_t-H)\,G=0$ を満たすのに，その中の $t>t'$ 成分を取り出した $G^{\mathrm{ret}}(x-x')$ は非斉次方程式に従っている[*4]．不思議な感じがする．物理的には (6) 式の右辺は時刻 t' に場所 $\boldsymbol{x}'$ に局在した点状の**波源**を表しており，$G^{\mathrm{ret}}(x-x')$ はこの波源から時間・空間的に発展する波動を表すと解釈できる．静かな水面の一点をたたくと，その点を中心とする円状の波が発生し，広がっていく．そんな様子を思い浮かべればよい．そのように波動の生成は本来不連続な現象であり，（$t=t'$ で波が急に立ち上がるという）causal な境界条件のために $G^{\mathrm{ret}}(x-x')$ の満たす方程式には必然的に波源の情報が入るのである．

Dirac のブラ・ケットの表記に親しんだ読者であれば，(5) 式から座標表示の基底 $|x\rangle$ を用いて

$$G^{\mathrm{ret}}(x-x')=\langle x|(i\partial_t-H+i\epsilon)^{-1}|x'\rangle\quad(7)$$

と表せることが分かるであろう．これは $G^{\mathrm{ret}}(x-x')$ が微分演算子 $i\partial_t-H$ の逆行列であることを意味している．このように微分方程式の解を与える “積分” 演算子を一般に**グリーン関数**と呼ぶ．

実際，任意の波源 $j(\boldsymbol{x},t)$ から生じる波動 $\psi(\boldsymbol{x},t)$

---

*2)　(1) 式を用いて，微少時間 δt ごとの ψ の変化 $\delta\psi=-iH\psi\,\delta t$ を足し上げれば，iG が $\langle\boldsymbol{x}|e^{-i(t-t')H}|\boldsymbol{x}'\rangle$ と表せる．これを書き直しても (4) 式が得られる．

*3)　$\sum_{\omega,\boldsymbol{p}}e^{-i\omega\,t+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}=\delta(t)\,\delta^3(\boldsymbol{x})$．デルタ関数 $\delta(x-x')$ は $x=x'$ の近傍に局在したピークをもち，$\sum_x\delta(x-x')=1$ を満たす．$\delta(x-x')=\langle x|x'\rangle$ とも書ける．

*4)　一般に「非斉次方程式の解 ＝ 特解 ＋ 斉次方程式の解」と表せる．(5) 式については，特解は波源による強制振動の効果を表し，$\omega\neq E_{\boldsymbol{p}}$ の振動成分を含む．斉次方程式の解（$\omega=E_{\boldsymbol{p}}$ の成分のみ）の混じり具合を調整することで，$t>t'$ にのみ波動が伝搬するという境界条件を満たすことができる．

を記述する方程式

$$\left(i\,\partial_t - H\right)\psi(\boldsymbol{x},t) = j(\boldsymbol{x},t) \qquad (8)$$

の解は直ちに

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = \sum_{t'}\sum_{\boldsymbol{x}'} i\,G^{\mathrm{ret}}(x-x')\,j(\boldsymbol{x}',t') \quad (9)$$

と書ける．任意の分布 $j(\boldsymbol{x},t)$ は点状の波源の重ね合わせとして表せるので，生じる波動も重ね合わせとなると考えてもよい．ここで $j(\boldsymbol{x}',t) \to \delta(t-t')\,\psi(\boldsymbol{x}',t')$ と置けば (3) 式の場合に対応する．「ある時刻の波面から放出される素元波の包絡面が新しい波面になる」というホイヘンスの原理を表しているのは，素元波の causal な伝搬という観点からは (3) 式というよりはこの G^{ret} を用いた式のほうであろう．

粒子（波動）がポテンシャルなどの影響を受けて伝搬する様子もグリーン関数を用いて記述できる．(7) 式で $H \to \hat{\boldsymbol{p}}^2/(2m) + V(\boldsymbol{x})$ と置けばポテンシャルの効果を取り込める．このグリーン関数を V のべきに展開すると，$O(V)$ 項がボルン近似の散乱振幅を与える．

3. 場の理論への移行

次に 1 粒子の量子力学を別の観点から眺めてみる．まずシュレディンガー方程式 (1) を変分原理の形式に書いてみよう．作用として

$$S = \int dt \sum_{\boldsymbol{x}} \psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)(i\partial_t - H)\,\psi(\boldsymbol{x},t) \quad (10)$$

を考える．これを $\psi^\dagger$（ψ のエルミート共役）について変分すると確かに (1) 式が得られる．

ここで論理的な飛躍ではあるが，$\psi(\boldsymbol{x},t) \equiv \psi(x)$ を波動関数ではなく**量子的な "場"** と見なして，その量子論を作ってみよう．実はその理論にもとの 1 体系の量子力学とともに多体系の量子力学が含まれていることを以下で見る．

まず量子力学の代表的な演習問題，**調和振動子**の量子化を思い出そう．座標 x と運動量 $\hat{p}$ の適当な（複素）線形結合を作ると $[a, a^\dagger] = 1$ を満たす生成・消滅演算子 $a^\dagger$ と a が構成できた．これらを用いてハミルトニアンは $H_{\mathrm{os}} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 = \omega_0\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$ と書ける．最低エネルギー状態として真空 $|0\rangle$ を導入すると，エネルギー ω_0 の量子が n 個ある状態は $|n\rangle = \{(a^\dagger)^n/\sqrt{n!}\}|0\rangle$ と表せた．実は複素座標 $a(t) = \sqrt{m/2}\,\{\sqrt{\omega_0}\,x + (i/\sqrt{\omega_0})\,\dot{x}\}$ を用いると調和振動子の作用 $\int dt\,\frac{1}{2}m\,(\dot{x}^2 - \omega_0^2 x^2)$ 自身が

$$S_{\mathrm{os}} = \int dt\, a^\dagger(t)(i\partial_t - \omega_0)\,a(t) \qquad (11)$$

という形に書き直せる（正準理論によると $a^\dagger i\partial_t a$ という構造から交換関係 $[a, a^\dagger] = 1$ が導かれる）．調和振動子が何種類もあるときには $a \to a_k$, $\omega_0 \to \omega_k$ $(k = 1, ..., N)$ として数を増やせばよい．

(10) 式と (11) 式とを比べると，(10) 式は，空間を細かい賽の目に分割して，その各賽の目に調和振動子を配置した，つまり $a_{\boldsymbol{x}}(t) \to \psi(\boldsymbol{x},t)$ とした無数の振動子の集団を表していると理解できる．場 $\psi(x)$ は時空点 x において量子を**消滅**し，$\psi^\dagger(x)$ は量子を**生成**するとも解釈できる．このような量子の生成・消滅が実は前節で考えた波動の放射・吸収と正確に対応する．

実際，場を平面波に展開して

$$\psi(\boldsymbol{x},t) = \sum_{\boldsymbol{p}} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\,\psi_{\boldsymbol{p}}(t) \qquad (12)$$

と置くと，(10) 式は $[\int dt \sum_{\boldsymbol{p}} \psi_{\boldsymbol{p}}^\dagger (i\partial_t - E_{\boldsymbol{p}})\psi_{\boldsymbol{p}}$ となり］運動量空間に住む独立した調和振動子に分解される．したがって $\psi_{\boldsymbol{p}}$ は交換関係

$$[\psi_{\boldsymbol{p}}(t), \psi_{\boldsymbol{p}'}^\dagger(t)] = \delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'} \qquad (13)$$

を満たす．場 ψ がボーズ粒子を表すときにはこれでよいが，電子のようなフェルミ粒子の場合には，これを反交換関係 $\{\psi, \psi^\dagger\} \equiv \psi\psi^\dagger + \psi^\dagger\psi = \delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}$ に読み替える（このように仮定すると，結果としてフェルミ統計が矛盾なく導入できる）．$\psi_{\boldsymbol{p}}^\dagger \equiv (\psi_{\boldsymbol{p}})^\dagger$ は運動量 $\boldsymbol{p}$，エネルギー $E_{\boldsymbol{p}}$ をもつ波動/粒子を生成し，$\psi_{\boldsymbol{p}}$ はそれを消滅させる役割を果たす．

粒子の存在しない最低エネルギー状態を**真空**と呼び，$|0\rangle$ と表す．つまり真空を

$$\psi_{\boldsymbol{p}}|0\rangle = 0 \quad \text{for all } \boldsymbol{p} \tag{14}$$

と定義する．すると運動量 $\boldsymbol{p}$ をもつ粒子が1個ある状態は $|\boldsymbol{p}\rangle = \psi^\dagger_{\boldsymbol{p}}|0\rangle$ と表され，運動量をそれぞれ $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ もつ粒子が2個ある状態は $|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\rangle \propto \psi^\dagger_{\boldsymbol{p}_1}\psi^\dagger_{\boldsymbol{p}_2}|0\rangle$ と表すことができる．同様に N 体の状態も構成できる．このようにして組み立てられる状態空間を Fock 空間と呼ぶ．

ここで次の "真空期待値" $\langle 0|\psi(x)\psi^\dagger(x')|0\rangle$，つまり時空点 x' で粒子を生成し，点 x で粒子を消滅させる過程の "期待値" を考えてみよう．展開式 (12) [と $\psi_{\boldsymbol{p}}(t) = e^{-iE_{\boldsymbol{p}}t}\psi_{\boldsymbol{p}}(0)$] を代入してみれば，直ちにこれが (4) 式の $i\,G(x-x')$ に等しいことが分かる．$t > t'$ に制限すれば，$i\,G^{\mathrm{ret}}(x-x')$ も得られる．したがって，場の理論ではグリーン関数を粒子の**生成・伝搬・消滅**という目に見える過程で表示できることが分かった*5)．

場の理論は1体系だけでなく多体系の量子力学をも（粒子の生成消滅に注目して）簡潔に記述する便利な言語である．同一粒子の N 体の波動関数は $\langle 0|\psi(\boldsymbol{x}_1)\psi(\boldsymbol{x}_2)...\psi(\boldsymbol{x}_N)|\Psi_N\rangle$ と表され，通常のシュレディンガー方程式を満たすことが示せる．粒子どうしの相互作用も容易に取り込める．

4. 多体系と電子・ホール描像

金属とか半導体などを研究対象とする物性物理においては膨大な数の電子（$1\,\mathrm{cm}^3$ あたり 10^{22} 個ほど）からなる系を考察する．場の理論はこのような多体系においてその威力を発揮するとともに，新たな物質観をもたらす．

電子は**フェルミ統計**に従うので，（スピンと）運動量 $\boldsymbol{p}$ の確定した状態には高々1個の電子しか入れない．したがって，状態空間の中に電子を詰めていくと，電子はエネルギーの低い状態から順に詰まり始めて，最終的には電子数で決まる運動量の上限 k_{F}（フェルミ運動量）までの状態 ($|\boldsymbol{p}| \leq k_{\mathrm{F}}$) を満たす．このような状態を（現実のフェルミ多体系の基底状態という意味で）**フェルミ真空** $|\mathrm{F}\rangle$ と呼ぼう．$|\mathrm{F}\rangle \propto \psi^\dagger_{\boldsymbol{p}_i}\psi^\dagger_{\boldsymbol{p}_2}...\psi^\dagger_{\boldsymbol{p}_N}|0\rangle$ ($|\boldsymbol{p}_i| \leq k_{\mathrm{F}}$) と表せる．その内部 ($|\boldsymbol{p}| \leq k_{\mathrm{F}}$) の状態を**フェルミの海**またはディラックの海とも形容する．

*5) 他の組合せ $\langle 0|\psi^\dagger\,\psi|0\rangle$，$\langle 0|\psi\,\psi|0\rangle$，$\langle 0|\psi^\dagger\,\psi^\dagger|0\rangle$ は真空の定義からゼロとなる．

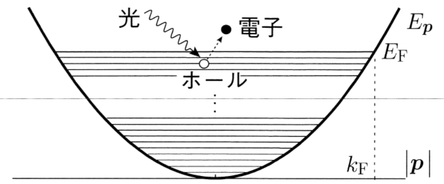


図2　フェルミ真空と光による電子・ホール対生成．

フェルミの海は電子で満ちており，さらに電子を詰めることはできないが，電子を消すことはできる．つまり $|\boldsymbol{p}| \leq k_{\mathrm{F}}$ のときには $\psi^\dagger_{\boldsymbol{p}}|\mathrm{F}\rangle = 0$, $\psi_{\boldsymbol{p}}|\mathrm{F}\rangle \neq 0$ である（一方 $|\boldsymbol{p}| > k_{\mathrm{F}}$ の電子については $\psi_{\boldsymbol{p}}|\mathrm{F}\rangle = 0$, $\psi^\dagger_{\boldsymbol{p}}|\mathrm{F}\rangle \neq 0$ となる）．

このような電子の欠乏状態 $\psi_{\boldsymbol{p}}|\mathrm{F}\rangle$ が時刻 t' に生じ，後の時刻 t にまたもとの状態に戻ったとして，次の表式 $\langle \mathrm{F}|\psi^\dagger_{\boldsymbol{p}}(t)\,\psi_{\boldsymbol{p}}(t')\,|\mathrm{F}\rangle$，あるいは $\langle \mathrm{F}|\psi^\dagger(x)\,\psi(x')\,|\mathrm{F}\rangle$ を考えてみよう．展開式 (12) を代入して計算すると，結果は (4) 式で $\boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p}$, $E_{\boldsymbol{p}} \to -E_{-\boldsymbol{p}}$ と置き換え，和 $\sum_{\boldsymbol{p}}$ を $|\boldsymbol{p}| \leq k_{\mathrm{F}}$ の範囲に限ってとったものになる．つまり，この状態変化は運動量が $-\boldsymbol{p}$ でエネルギーが $-E_{-\boldsymbol{p}}$ の粒子（波動）の伝搬のように見える．視覚的に言うと，電子の欠乏した状態 $\psi_{\boldsymbol{p}}|\mathrm{F}\rangle \neq 0$ はいわばフェルミ海 $|\mathrm{F}\rangle$ 中に泡が生じた状態であり，泡は電子とは逆の電荷 $e > 0$ をもち，運動量が $-\boldsymbol{p}$ でエネルギーが $-E_{-\boldsymbol{p}}$ の粒子のように見える．この "反電子" である粒子を**ホール**（正孔；hole）と呼ぶ．上記のことから，

$$iG^{\mathrm{ret}}_{\mathrm{hole}}(x\text{–}x') = \theta(t\text{–}t')\,\langle \mathrm{F}|\psi^\dagger(x)\,\psi(x')\,|\mathrm{F}\rangle \tag{15}$$

が電子の欠乏状態あるいはホールの伝搬を表すグリーン関数であることが分かる．

ホール自身のエネルギーが負であることから，フェルミ真空中では泡が勝手に増殖してしまうのではと心配になるが，幸いそのようにはならない．$N-1$ 個の電子からなるフェルミ真空と比べるとホールのもつエネルギーの相対値は $E_{\mathrm{F}} - E_{-\boldsymbol{p}} > 0$

$[E_{\rm F}=k_{\rm F}^2/(2m)]$ となり，ホールを作り出すにはエネルギーが必要となるからである．

具体例として，光により電子がフェルミの海の中から外に励起される場合を考えてみよう．この過程はフェルミ真空上の電子とホールの対生成とも見なすことができる．光のエネルギーが対のエネルギーに転化することは図 2 から明らかであろう．逆に，電子が海中の泡の状態に落ち込む（電子・ホール対消滅）と光が放射される．

$G_{\rm hole}^{\rm ret}(x-x')$ はホールの伝搬を表しているが，微分演算子 $(i\partial_t \pm H)$ の逆演算としてのグリーン関数ではない．(6) 式の右辺のデルタ関数を作り出すためには，電子の伝搬も考慮に入れるとよい．正しい組合せは演算子を時間の順序に従って配列した T 積であり，$\psi\psi^\dagger$ については

$$T\psi(x)\psi^\dagger(x')=\theta(t-t')\,\psi(x)\psi^\dagger(x') -\theta(t'-t)\,\psi^\dagger(x')\,\psi(x) \quad (16)$$

と定義する．この $\boldsymbol{T}$ **積を用いたグリーン関数** $\langle {\rm F}|T\psi(x)\psi^\dagger(x')|{\rm F}\rangle$ は多体系あるいはフェルミ真空上の電子とホールの伝搬を表す最も自然なグリーン関数であり，$t>t'$ では電子の伝搬を，そして $t'>t$ ではホールの伝搬を表すことはすぐに分かる．(6) 式と同じ微分方程式を満たすことから，その解は (5) 式と同じ形に書ける．フーリエ空間での表式は

$$\langle {\rm F}|T\psi(x)\psi^\dagger(x')|{\rm F}\rangle \overset{\rm F.tr.}{=} \frac{i}{\omega-E_{\boldsymbol{p}}+i\epsilon_p} \quad (17)$$

となる．ただし $\omega=E_{\rm F}$ を境にして境界条件が変わるので，$|\boldsymbol{p}|>k_{\rm F}$ では $i\epsilon_p=i\epsilon$ と，そして $|\boldsymbol{p}|\le k_{\rm F}$ では $i\epsilon_p=-i\epsilon$ と定義した．つまり $t>t'$ のときには (5) 式と同じに電子の自由な伝搬 $e^{-i(t-t')\,E_{\boldsymbol{p}}+i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}$ $(|\boldsymbol{p}|>k_{\rm F})$ を取り出し，一方 $t<t'$ のときには（図 1 のように ω の積分路を ω 平面の上半面で左に折り返して）ホールの伝搬 $e^{i(t-t')\,E_{\boldsymbol{p}}-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}$ $(|\boldsymbol{p}|\le k_{\rm F})$ を取り出す．もちろん，電子とホールの伝搬が同時に起こるわけではない．

このようにして場の理論の枠組みの中で**電子・ホール描像**に行き着いた．電気伝導など物資の電気・磁気・熱的な性質はフェルミ海面近くの電子・ホールの様子で決まることが多い．場の理論はそれを解き明かす自然な言語となる．

5. ボーズ場の場合

電磁場や格子振動（フォノン）の場合には，時間について 2 階の微分方程式に従う場を考える．例えば一定の速度 v で伝搬する波動は微分方程式

$$(\partial_t^2-v^2\nabla_{\boldsymbol{x}}^2)\,\phi(x)=0 \quad (18)$$

で記述される（$\phi(x)$ は実数の場で，電気的には中性とする）．このような場のグリーン関数を求めてみよう．

まずこの式は振動数 ω_0 の調和振動子の運動方程式 $\ddot{x}=-\omega_0^2 x$ と同じ形をしていることに着目しよう．実際，運動量空間では $\omega_0 \to v\sqrt{-\nabla^2}=v\,|\boldsymbol{p}|\equiv\omega_{\boldsymbol{p}}$ に対応する．(11) 式で見たように調和振動子は複素座標 $a(t)$ を用いると時間について 1 階の微分方程式に従う系に変換できた．そこで $\phi(x)$ の場合に $a(t)$ にあたる複素場を $\psi(x)$ とすると，(18) 式は本質的に (1) 式で $H(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{p}})\to v\sqrt{\hat{\boldsymbol{p}}^2}$ としたシュレディンガー方程式と同等である．

ただし量子化の際には $\psi(x)$ が**ボーズ統計**を満たすように，同時刻交換関係 $[\psi_{\boldsymbol{p}},\psi_{\boldsymbol{p}'}^\dagger]=\delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}$ を設定する（さらに (16) 式の T 積の定義では右辺に現れる $-$ を $+$ に変える）．また，**パウリの排他律**が働かないので，電子の場合の“フェルミの海”に対応するような多体の基底状態はない．（ϕ 粒子のいない）真空 $|0\rangle$ が基底状態となる．

このことから直ちに，場 $\psi(x)$ のグリーン関数 $\langle 0|T\psi(x)\psi^\dagger(x')|0\rangle$ が $i/(\omega-\omega_{\boldsymbol{p}}+i\epsilon)$（のフーリエ変換）として与えられることが分かる．さらに $\phi(x)$ を $\psi,\psi^\dagger$ で表すと，$\langle 0|T\phi\phi|0\rangle \sim (2\omega_{\boldsymbol{p}})^{-1}\,\langle 0|T\psi\psi^\dagger+T\psi^\dagger\psi|0\rangle$ となるので，ϕ 場のグリーン関数

$$\langle 0|T\phi(x)\phi(x')|0\rangle \overset{\rm F.tr.}{=} \frac{i}{\omega^2-\omega_{\boldsymbol{p}}^2+i\epsilon} \quad (19)$$

も得られる．これは明らかに $(\partial_t^2-v^2\nabla_{\boldsymbol{x}}^2)$ の逆

演算子であり，$\omega = \pm(\omega_{\boldsymbol{p}} - i\epsilon)$ の極の位置からエネルギー $\omega_{\boldsymbol{p}} = v\,|\boldsymbol{p}|$ の波動の放射と吸収を表すことが分かる．

6. 相対論的場の理論

素粒子論では日常的に相対論的に不変な量子系を取り扱う．相対論に進むと，電子は4成分の場で記述され，時間・空間についてともに1階の微分方程式（Dirac方程式）に従う．また，スピン・ゼロの自由粒子は(18)式とよく似たKlein–Gordon方程式を満たす．両方程式とも正・負エネルギー解を持つ．このため両者を量子力学の方程式として取り扱う当初の試みは，（系の不安定性や負の確率などの困難に見舞われ）破綻した．この困難は前節で見たように場の理論に移り，正・負エネルギー解を量子の生成・消滅と解釈することにより解消する．この意味で，場の理論は相対論的な量子論には必須の理論体系である．

相対論的場の理論からは粒子とは電荷の符号が異なる**反粒子**の存在が帰結される．電子に対してはフェルミ真空が（電子も陽電子も存在しない最低エネルギー状態として）唯一の真空となる．ディラックはこのように解釈して，電子の反粒子（陽電子）の存在を予言した．ボーズ粒子についても粒子・反粒子描像は当てはまり，例えば π^+ 中間子は π^- 中間子の反粒子である．このようにして相対論的場の理論は必然的に粒子・反粒子とともに，（光，電子，クォーク，グルーオンなど）多彩な粒子が互いに**転化**し合う様子をも記述する多体場の理論となる．

7. 境界条件とカシミァ効果

場の理論では場を無限個の振動子の集団と見なした．量子力学で調和振動子にはゼロ点エネルギー（$\sim \frac{1}{2}\hbar\omega_0$）があることを知っているので，量子場にも（無数の，したがって無限大の）**ゼロ点エネルギー**が伴っているはずである．真空中でも場は量子的に揺らいでいると理解すればよい．この揺らぎのエネルギー自身は観測できないが，揺らぎの様子は境界条件によって変わるので，状況設定を工夫するとゼロ点エネルギーの違いは観測できる．

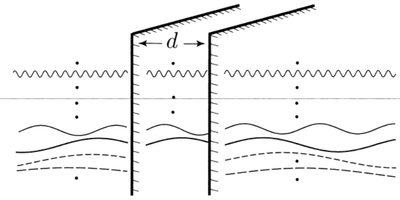


図3　ゼロ点振動が導体板を押す．

2枚の（帯電していない）導体板を平行に近接して置くとその間に微弱な引力が働く．この量子現象を**カシミァ効果**という（図3参照）．導体間には電磁場（光子）のゼロ点振動が現れるが，導体のところで場がゼロになるという境界条件から，導体間の距離 d の2倍より長い波長の振動は生じない．一方，2枚の導体板の外側ではさらに長い波長のゼロ点振動も存在する．もちろん d より十分に短波長の成分は導体板間でも外部でも共通である．その結果，ゼロ点振動のエネルギー密度が導体板間では外側に比べ（微妙に）小さくなるので，導体板間には引力（$\propto \hbar c/d^4$）が働くことになる．量子的な揺らぎが導体板を押すのである．Casimirによる理論的予言は実験で検証された．

8. 最後に

波動方程式が古典物理，量子力学，場の理論，素粒子論と舞台を新たにするとともに，その意味と適用範囲を大きく広げ，また新たな物質観をもたす様子を大急ぎで見てきた．私たちの自然に対する理解を深める道具として波動方程式に親しみを感じていただけたら幸いである．

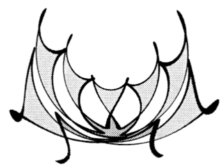
参考文献

1) 場の理論の教科書として，
C. Itzykson and J.-P. Zuber, “Quantum Field Theory”, McGraw-Hill Inc. (1980).

（しずや・けんいち，京都大学基礎物理学研究所）

時空の幾何学

相対性原理を極めよう



加藤 晃史

1. はじめに

物理学はもともと万人が目にする自然現象から問題が派生しているので，現象に対するイメージがあらかじめ共有され，問題の意味を改めて説明しなくても良いという利点がある．一方，数学は抽象的であるがゆえに普遍性を持ち，また論理が明確なので，高価な実験装置などがなくても誰にでも検証可能であるという利点がある．

これらの利点は逆に欠点にもなり得る．物理では目の前の現象に引きずられて本質を捉えるのが難しく，また数学では概念が抽象的過ぎてイメージが持てず，結局使いこなすことができない．

何も物理数学をやるんだと力む必要はない．肝心なのは両方のものの見方を自在に行き来する心構えだ．物理と数学はもともと密接な関係があり，これによって双方をより深く理解できる効用がある．本稿では筆者が学部生向けの解析力学の講義や「数理物理への誘い」と銘打った全学ゼミナールで試みたことの一端を紹介したい．

2. 特殊相対論と線型代数

Einstein の特殊相対性理論は次の２つの原理に基づいて，様々な驚くべき結果を導出し，物理学に革命をもたらした．

- **相対性原理**—物理の基本法則は，どの慣性系でも同じ形をとるように定式化できる．
- **光速度不変の原理**—真空中における光の速さはどの慣性系で測っても同一である．

以下では相対性原理の意味を考えるため，表１のような物理語と数学語の翻訳辞書を用意してみよう．

相対性理論で慣性系の「観測者」に対し期待されているのは，固有の時計と物差しを持ち，時空で生じた各事象（event）に対し，その時刻と位置という数字の組 (t, x, y, z) を一意的に対応させる「装置」としての役割である．この意味で，「観測者」はベクトル空間の「基底」と全く同じ役割を果たしている[*1]．

実際，$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ がベクトル空間 V の基底であることの定義は，「線型結合をとる写像

$$\psi : \mathbb{R}^n \to V, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i$$

が全射（V を生成すること）かつ単射（線型独立であること）であること」であり，これは「ベク

表１　特殊相対論と線型代数の辞書．

特殊相対論	線型代数
時空	ベクトル空間
事象	ベクトル
観測者	基底
位置・時刻	座標
⋯	⋯

*1）相対性理論が世の人に難解だと誤解され，しばしば似非科学の餌食になる理由の一つとして，観測者に対する過剰な感情移入があるように思われる．

トルと座標を対応させる装置として完全で無駄がなく機能するための保証書」と言える．

すると，相対性原理の線型代数版は，

- 線型代数の基本定理は，基底（あるいは座標系）の選び方に依らずに述べられるべきである．

ということになる．そんなことはアタリマエだと思わないだろうか？「次元の一意性」,「線型写像や部分空間に関する次元公式」,「固有値と固有ベクトル」,「線型変換の対角化可能性」など，講義で学ぶ主要な定理や概念はすべて基底や座標系の選び方に依らずに述べられている．

そう，このアタリマエに思えることこそが物理数学の効用である．無味乾燥な抽象ベクトル空間の公理であるが，それのみから導いた結論は基底や座標系の選び方に依らずに成り立つという意味で，**自動的に相対性原理の要請を満たす**のである．相対性原理がアタリマエだなんて，何て凄いことだろう！

このような数学の効用は，物理に十分浸透しているかというと，私にはそうは見えない．例えば，写像 $f : V \to V$ が線型であることは何かと問われれば，誰もが重ね合わせの原理と両立すること，すなわち

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b}), \quad f(c\boldsymbol{a}) = cf(\boldsymbol{a})$$

が成り立つことだと答えるだろう．どんな線型変換 f も，基底を選べば正方行列 $A=(a_{ij})$ で表現され，異なる基底の下で表現行列は

$$A \mapsto A' = P^{-1}AP \tag{1}$$

のように変化することも学ぶ．しかし，誰も,「基底の取り替えの下で (1) のように変換する行列のことを線型写像と呼ぶ.」とは言わない．そんな定義では線型写像の本質は決して伝わらない．

ところが相対論の教科書等で,「テンソルとは，数の組 $T_{j_1 j_2 \cdots j_s}$ であって座標変換 $x^i = \sum_j p^i{}_j x'^j$ の下で

$$T_{j_1\cdots j_s} = \sum_{i_1,\cdots,i_s} p^{i_1}_{j_1}\cdots p^{i_s}_{j_s} T'_{i_1\cdots i_s} \tag{2}$$

として変換するもの」といった類の「定義」がいまだに多く，物理に燃える若者たちにとっての鬼門となっている．

相対性原理によれば，テンソルの正しい理解には，座標や成分に頼ってはだめで，ベクトルと線型写像の言葉で述べなければならない．V をベクトル空間とするとき，V 上の $(0,s)$ 型のテンソルとは，**多重線型写像**

$$T : \overbrace{V\times\cdots\times V}^{s} \to \mathbb{R}$$

のことに他ならない．

例えば，一様磁場中で，ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ を辺とする平行四辺形を貫く磁力線の本数を $F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ で表すことにすれば，写像

$$F : V\times V \to \mathbb{R}, \quad (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \mapsto F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

が定まる．写像 F は明らかに辺 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ について（交代）多重線型性を持ち，$(0,2)$ 型のテンソルとなっている．つまり「磁場 $=(0,2)$ 型テンソル F」と見るのが自然である．この見方は，磁場が面を貫く力線の本数で測られるという本質を余すことなく表現している．一般の電磁場が 2 次の微分形式（＝時空の各接平面ごとに定義された $(0,2)$ 型のテンソル）F で表せる理由もここにある．

テンソルが多重線型写像と納得できれば，それを基底を通じて数の集まりで表現することや，変換性 (2) を導くのは，線型変換の場合と全く同様にできる．テンソルの本質は変換性にあるのではなく，多重線型性にある．

3. 曲面上の測地線と内在的幾何学

$\mathbb{R}^3$ 内の 2 点 A, B を結ぶ曲線のうち長さが最小のものは線分であることは誰でも知っている．では図 1 のように曲面 S が指定され,「S 上の 2 点 A, B を結ぶ曲線で長さは最短のもの（測地線）は？」という問題はどうだろうか．

この問題を，$\mathbb{R}^3$ 内の曲線の変分問題に「S からはみ出さない条件」を課した条件付き極値問題と見なすことも可能だが，拘束条件の扱いが非常に難しくなってしまう．はじめから「S 内の曲線だけ」を扱ううまい方法はないだろうか？

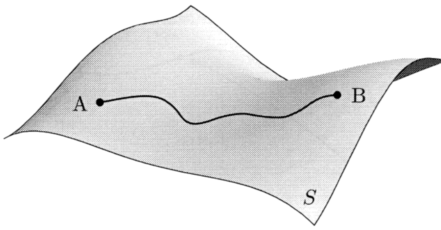


図 1　曲面 S 上の 2 点 A, B を結ぶ曲線.

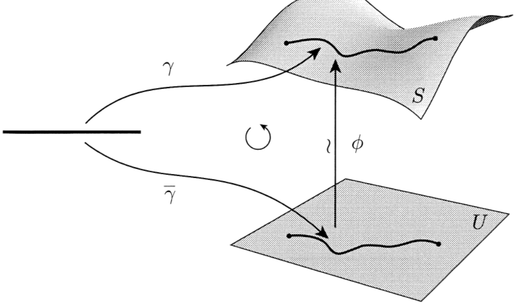


図 2　曲面 S とその地図 U に描かれた曲線.

もし，曲面 S の「地図」U があればどうだろうか？ 地図 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上の点で曲面 S 上の任意の点が表されるわけだから，滑らかな 1 対 1 写像 $\phi : U \xrightarrow{\sim} S$ があると考えてよい．同様に，曲面 S 上のどんな曲線 $\gamma : [a,b] \to S \subset \mathbb{R}^3$ も，地図 U 上の曲線 $\overline{\gamma} : [a,b] \to U \subset \mathbb{R}^2$ を用いて，合成関数

$$\gamma = \phi \circ \overline{\gamma} \tag{3}$$

で表せるはずだ (図 2)．ϕ は地図自身で決まっているので，「曲面 S 上の曲線 γ を動かして最短経路を探す問題」は，「地図 U 上の曲線 $\overline{\gamma}$ を動かして最短経路を探す問題」に置き換わった．

地図を導入するだけで，「曲線が S からはみ出てはいけない」という拘束条件の問題が回避されると同時に，問題が平面上の曲線の変分問題になってしまった！

では S の曲がり具合の情報は何処へ行ったのか？ 曲面上の曲線 γ の長さは

$$\mathcal{L}[\gamma] = \int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{d\gamma^k(t)}{dt} \right)^2} dt \tag{4}$$

で与えられるが，対応 $\gamma \leftrightarrow \overline{\gamma}$ があるのでこれを地図 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上の曲線 $\overline{\gamma}$ の汎関数とも見なせるはずである．実際，合成関数 (3) を微分すると，

$$\frac{d\gamma^k}{dt} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \phi^k}{\partial x^i} \frac{d\overline{\gamma}^i}{dt}$$

となり，これを (4) に代入して整理すると γ の長さは

$$\int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(\overline{\gamma}(t)) \frac{d\overline{\gamma}^i(t)}{dt} \frac{d\overline{\gamma}^j(t)}{dt}} dt \tag{5}$$

で与えられることとなる．ただし，

$$g_{ij}(x) := \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \phi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \phi^k}{\partial x^j}$$

とおいた．対称行列 $g_{ij}(x)$ は**第一基本形式**とも呼ばれ，地図の情報 $\phi : U \to S$ だけで決まり，曲線 $\overline{\gamma}$ とは無関係であることに注意しよう．

式 (5) を $b \to a$ の極限で考えればわかるように，地図上の点 x におけるベクトル $v \in \mathbb{R}^2$ の「本当の長さ」は

$$||v||_x = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(x) v^i v^j}$$

で与えられる．第一基本形式 $g_{ij}(x)$ は，場所ごとに変化する「縮尺」の役割を果たしている．

以上の議論からわかることは，「曲線の長さに関するあらゆる情報は，縮尺付きの地図 $(U, g_{ij}(x))$ に集約されており，曲面 S がその外側の空間 $\mathbb{R}^3$ にどのように埋め込まれているかという情報は必要でない．」ということである．これが Gauss が発見した内在的幾何であった．

曲線の長さがわかれば距離が定義できるし，角度や面積なども議論できる．Riemann は発想を押し進めて，地図＋縮尺で捕えられる性質の総体こそが図形であると宣言し，Riemann 多様体の概念をうち立てた．この立場では $g_{ij}(x)$ は**計量** (metric) と呼ばれ，(5) は曲線の長さの定義と見なされる．

Einstein の一般相対性理論にとって，Riemann 幾何は大変な福音であった．まず，重力場が計量という幾何学的な意味を付与されることになった．それ以上に，**曲率とは撓**(たわ)**みでなく，伸び縮みであ**るとする内在的幾何の考え方が，宇宙の外に出ら

れない我々でも宇宙の曲がり具合を科学的に議論できる保証を与えてくれた.

4. 陰と陽の見方

時空とは何か？ 時空とは，運動が起こる舞台である．では運動とは何か？ 運動とは時空内の位置の変化である $\cdots$ あれ？ 定義が堂々巡りしてしまった．このように時空と運動とは切り離せない.

不毛な循環論法を断ち切るため，時空を定義することは先送りにして，集合や写像の言葉で時空の幾何学がやろうとしていることを考察してみよう.

未知の対象 X を知りたいとき，良く知っている対象 A と較べるというのが常套手段で，数学的には写像を考えることにあたる．このとき,

- **【陽】** A から X への写像 $A \to X$,
- **【陰】** X から A への写像 $X \to A$

という 2 通りが考えられる.

いま，時空 M が未知の対象であり，数直線 $\mathbb{R}$ が良く知っている対象であるとすれば，【陽】 $\gamma:\mathbb{R} \to M$ は M 上の曲線，あるいは M 内の運動であり，【陰】 $f: M \to \mathbb{R}$ は M 上の関数にあたる（図 3, 4 参照).

M のことを良く知るには，陰と陽どちらか一方では片手落ちで，両者を組み合わせることが大事である．特に，M がいかに複雑であろうと，最初に陽・次に陰という写像の合成

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} M \xrightarrow{f} \mathbb{R} \tag{6}$$

は，単なる 1 変数関数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ であるというのは当然だが非常に重要である.

M 内で粒子を運動させ (γ)，それを観測する (f) ことと思えば，合成 (6) を考えることは物理の王道である．γ や f を様々に変えることで，M のより多くの情報が得られる．考えてみれば，我々が想定する M の「性質」とは，必ずこのような陰と陽の連鎖の中で捉えられるはずで，そうでない「性質」が仮にあったとしても，それは記述したり検証したりする術がない.

多変数関数の**方向微分**の考え方に陰・陽・合成の

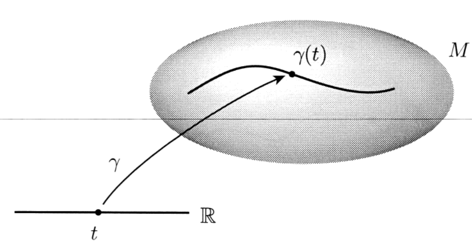


図 3　M 内の曲線 $\gamma:\mathbb{R} \to M$.

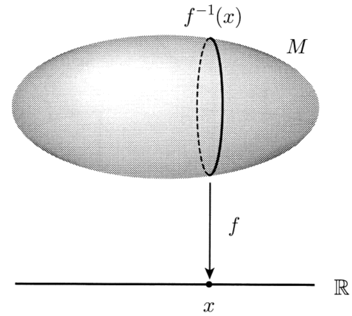


図 4　M 上の関数 $f: M \to \mathbb{R}$.

思想の典型を見ることができる．関数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の点 $p \in \mathbb{R}^n$ における $v \in \mathbb{R}^n$ 方向への方向微分 $(\nabla_v f)(p)$ は，$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(p+tv)$ で定義されるが，これは点の直線運動を表す写像 $\gamma:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto p+tv$ と，関数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ の合成で得られる 1 変数関数 $f \circ \gamma:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の $t=0$ での微係数にほかならない.

方向微分は $\mathbb{R}^n$ の各点 p に

陽の情報		陰の情報		簡単なもの（数）
方向ベクトル	×	関数	→	$\mathbb{R}$
v	,	f	↦	$(\nabla_v f)(p)$

という写像を定めていると考えられる．この写像は

$$(\nabla_{u+v} f)(p) = (\nabla_u f)(p) + (\nabla_v f)(p) \tag{7}$$

$$(\nabla_v (f+g))(p) = (\nabla_v f)(p) + (\nabla_v g)(p) \tag{8}$$

と言う意味で双線型写像であるばかりでなく,

$$(\nabla_v (f \cdot g))(p) = (\nabla_v f)(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot (\nabla_v g)(p) \tag{9}$$

という積の微分則（Leibniz 則）を満たしていることが容易に確かめられる.

上では γ を1次関数に選んだが，そう取る必然性はない．$\gamma(0)=p$ となる勝手な曲線 $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$，$\gamma(t)=(x^1(t),\cdots,x^n(t))$ に対して

$$(\nabla_\gamma f)(p)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f(\gamma(t))$$

と定義したとしても，性質 (8), (9) がそのまま成り立つことがわかる．

すると，次の疑問が湧いてくる：曲線は直線よりもはるかにたくさん存在するが，果たしてそれに匹敵するほど多くの方向微分が存在するのか？無駄はないのか？

そこで，「方向微分としての機能が同じ曲線を一つの仲間と見なして曲線を仕分けする」ことを考えよう．$\gamma(0)=p$ となる曲線全体の集合を Γ_p で表そう．$\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma_p$ に対し，「任意の $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ に対して，$(\nabla_{\gamma_1}f)(p)=(\nabla_{\gamma_2}f)(p)$ が成り立つ」とき，$\gamma_1\sim\gamma_2$ と書くことにしよう．$\sim$ が同値関係になっていることはすぐにわかる．

合成関数の微分法に関する連鎖律

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f(\gamma(t))=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(\gamma(0))\frac{dx^i}{dt}(0)$$

から，次の同値性がわかる：

$$\gamma_1\sim\gamma_2\iff\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\gamma_1(t)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\gamma_2(t).$$

つまり，p **における接ベクトルとは，**p **を通る曲線の，方向微分としての機能に関する同値類である**と見なしてよいということがわかった．

このような回りくどい言いかえをして何が嬉しいのだろう？ 実は，「方向微分としての機能に関する曲線の同値類」は，合成関数の微分という最低限のことしか使っていないため，$\mathbb{R}^n$ 内で運動しようが未知の空間で運動しようが意味を持つ．上の言いかえを接ベクトルの「定義」として採用すれば，我々が時空と呼ぶ勝手な M に対して，接ベクトルが議論できるのである！ しかも，この定義は特定の座標系を必要としないという点で完全に相対性原理の要請を満たす．

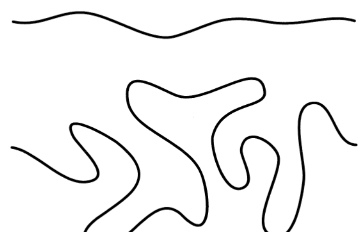
曲線の同値類の集合 $T_pM:=\Gamma_p/\sim$ にはベクトル空間の構造が入り，多様体 M の p における接ベクトル空間と呼ばれる．これらの全体 $TM=\bigcup_{p\in M}T_pM$ は M の**接束**と呼ばれ，M 内の曲線（運動）の Taylor 展開の1次までの情報，すなわち位置と速度を座標とする空間である．解析力学の横綱 Lagrangian は，TM 上の関数である．

接ベクトルの定義は陽 γ が主役で陰 f が脇役であったが，これを逆転させると点 p における余接ベクトル空間 T_p^*M の概念に到達する．それらを束ねた**余接束** $T^*M=\bigcup_{p\in M}T_p^*M$ は，物理では相空間と呼ばれる位置と運動量を座標とする空間である．解析力学のもう一方の横綱 Hamiltonian は，T^*M 上の関数である．

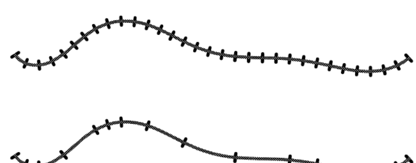
陽と陰の連携として物事を理解することに慣れれば，ホモロジーやコホモロジーとお友達になることも難しくないだろう．

5. 測地線の方程式とゲージ対称性

微積分や Riemann 幾何を知らない子供でも，



の2本のどちらの曲線が長いかを尋ねたら，下のほうが長いと答えるだろうし，目盛りの振り方だけが異なる2本の曲線



の長さは等しいことを納得する．このように，長さは観測者（地図，座標系）によらない，相対論的に不変な量の典型である．変分原理による物理法則の定式化は，この意味で一般相対性理論と非常に相性が良い．

以下では n 次元 Riemann 多様体 (M,g) の測

地線の問題を考えよう．測地線とは，長さという汎関数を停留させる曲線である．相対性理論では「作用 = 質量 × 長さ」という関係があるので，運動方程式を解く，すなわち最小作用の原理を満たす運動を決めることと，測地線を求める問題は完全に等価である．

曲線の長さは部分弧の長さの和で与えられ，停留するという条件は局所的である．したがって曲線 $\gamma : [a,b] \to M$ は十分に短く，像が 1 枚の地図 U にすっぽり収まると仮定して一般性を失わない．そこで $U \subset \mathbb{R}^n$ 内の曲線 $x : [a,b] \to U$, $t \mapsto x(t) = (x^1(t), \cdots, x^n(t))$ で，長さ汎関数も

$$\mathcal{L}[\gamma] = \int_a^b v(t)dt,$$
$$v(t) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{dx^j(t)}{dt}} \tag{10}$$

と具体的に表されるとしよう．

汎関数 $\mathcal{L}[\gamma]$ に対して Euler–Lagrange の方程式を立てれば，$x(t)$ が満たすべき微分方程式が得られるが，実際にやってみればわかるように，これは非常に解きにくい形をしていて，初期条件を与えても解を一意に決められない．その理由は，汎関数 $\mathcal{L}[\gamma]$ が持つ異常に高い対称性にある．

先に触れたように，曲線の長さは曲線のパラメータの取り方によらない．すなわち，

> **命題 1**　$\gamma : [a,b] \to M$ を M 上の曲線，$f : [c,d] \to [a,b]$ を $f' > 0$, $f(c) = a$, $f(d) = b$ を満たす滑らかな関数とする．このとき $\mathcal{L}[\gamma] = \mathcal{L}[\gamma \circ f]$ が成り立つ．

したがって，もし γ が測地線なら $\gamma \circ f$ も測地線ということになるが，f の選び方は無数にあり，長さ $\mathcal{L}$ の停留条件だけでは写像 $t \mapsto x(t)$ を決めることはできない．これは困ったことだ．

一般に，汎関数が無限次元の変換の作用で不変となるとき，**ゲージ対称性**を持つと言う．このような場合は，解を決めるためには多少の工夫が必要である．

直感的には，測地線は 2 点間にバネやゴムを「ピンと張った」ときの形であり，弾性エネルギーが最小となる形のはずだ．バネもゴムも伸ばせば縮もうとする点では同じだ．ただし，ゴムの張力は伸びによらずほぼ一定なのに対し，バネの張力は伸びに比例するという違いがある．したがって弾性エネルギーは，ゴムでは伸びに比例するが，バネでは伸びの 2 乗に比例する．

長さ汎関数 (10) はゴムのエネルギーにあたる．その代わりに，バネのエネルギーに相当する

$$\mathcal{E}[\gamma] = \frac{1}{2}\int_a^b v(t)^2 dt$$

という汎関数を考えても，その停留点は測地線ではないだろうか．つまり，

$$\boxed{\gamma \text{ が } \mathcal{E} \text{ の停留点} \overset{??}{\Longrightarrow} \gamma \text{ が } \mathcal{L} \text{ の停留点}} \tag{11}$$

と期待したいのだが，これは果たして正しいだろうか？

すぐわかるように，命題 1 のようなゲージ不変性は $\mathcal{E}$ に対しては成立せず，(11) の逆は正しくない．しかし，$\mathcal{L}$ と $\mathcal{E}$ の変分問題は次のような関係にある．

> **命題 2**　(i)　次の不等式が成立する．
> $$\mathcal{E}[\gamma] \geq \frac{1}{2(b-a)}\mathcal{L}[\gamma]^2.$$
> (ii)　等号が成立する必要十分条件は $v(t)$ が定数，すなわちパラメータが弧長の 1 次関数で表されることである．

> **命題 3**　任意の曲線 $\gamma : [a,b] \to M$ に対し，パラメータの取り替え $f : [c,d] \to [a,b]$ が存在して，$\gamma \circ f$ は命題 2 (ii) の条件を満たすようにできる．

命題 2 は，$v(t)$ の平均値 $\overline{v} = \frac{1}{b-a}\int_a^b v(t)dt = \frac{\mathcal{L}[\gamma]}{b-a}$ からのゆらぎ $0 \leq \int_a^b (v(t) - \overline{v})^2 dt$ を考え，右辺を展開すれば示せる．命題 3 も，曲線 $\gamma \circ f$ の速さ $v(f(s))\frac{df(s)}{ds}$ が s によらないという条件を $f(s)$ に対する常微分方程式とみて，解の存在

を示せばよい．

命題2 (ii) の条件を満たすパラメータを，曲線のアフィンパラメータと呼ぶ．この条件は，アフィン変換 $t = at' + b$ 以外のパラメータの取り替えでは保たれないことに注意しよう．

命題1と命題3は，長さを保つゲージ変換（パラメータの取り替え）によって，任意の曲線をアフィンパラメータを持つ曲線に取り替えられることを保証する．このため，変分問題 (11) を考える範囲を，「アフィンパラメータを持つ曲線」に限定しても一般性を失わない．この操作を**ゲージ固定**と呼ぼう．このゲージ固定された状況下では，命題2の不等式は常に等式となり，この意味で (11) の矢印は成り立つことが示された．結局，当初の期待通り，測地線の問題をバネ型の汎関数 $\mathcal{E}$ の変分問題と考えてよいことがわかった．

$\mathcal{E}$ の変分問題は，Lagrangian $E : TM \to \mathbb{R}$ が[*2]

$$E(x, v) = \frac{1}{2} g_{kl}(x) v^k v^l$$

で与えられた解析力学の問題と思えば，お馴染みのものである．停留問題の解は，Euler–Lagrange 方程式

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x^i} \bigg|_{\substack{x=x(t) \\ v=\dot{x}(t)}} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial v^i} \bigg|_{\substack{x=x(t) \\ v=\dot{x}(t)}} \right) = 0$$

で与えられる．$E(x, v)$ の具体形を代入すると

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}(x(t)) \dot{x}^k \dot{x}^l - \frac{d}{dt} \left(g_{il}(x(t)) \dot{x}^l \right) = 0$$

となるが，第2項を合成微分して整理すれば，いわゆる**測地線の方程式**

$$\boxed{\frac{d^2 x^m}{dt^2} + \Gamma^m_{kl}(x(t)) \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^l}{dt} = 0 \qquad (12)}$$

を得る．ただし，

$$\Gamma^m_{kl} = \frac{1}{2} g^{mi} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right)$$

は Christoffel 記号である．

測地線の方程式 (12) は2階正規型の非線形常微分方程式である．この微分方程式の初期値問題を解くことで，時刻 $t = 0$ に位置 $x(0) = p \in M$ から初速 $\dot{x}(0) = v \in T_pM$ で物体を放り投げ，その $t = 1$ における位置 $x(1) \in M$ を見るという写像 $T_pM \to M$ が自然に定義できる．局所解の存在・一意性定理から，これは T_pM の原点近傍では微分同相となり，M の局所座標を定める．これを**正規座標**（normal coordinate）と呼ぶ．

測地線（自由落下）で定義された正規座標 $T_pM \to M$ の全射性・単射性がどのように崩れるかという問題は，宇宙の形や事象の地平線という問題と直結していて大変興味深い．

また，「曲線の長さ」の変分問題を「曲面の面積」の変分問題に置き換えれば，上で述べたゲージ対称性の扱いは南部・後藤作用と Polyakov 作用の関係という弦理論の話題ともつながっている．

6. 物理数学への期待

20 世紀以降，数学も物理も余りにも急激に発展したため，数学と物理をつなぐ辞書の編纂作業が追いついていないように感じる．

数学，特にトポロジー・代数幾何・整数論等で進行した大きなパラダイムシフトが，物理としても大きな意味があるように思われる．一方，量子論が突きつける観測者と被観測者の不可分性は，実体としての時空 v.s. 座標系としての観測者の区別に立脚していた相対性理論の根幹にかかわる大問題であり，数学における空間概念にも変更を迫るはずだ．

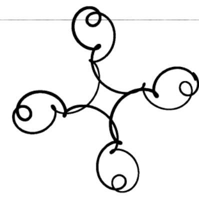
物理と数学の関係が，文化交流に留まらず，より普遍的な文明のレベルにまで高められるか，物理数学の今後に期待したい．

（かとう・あきし，東京大学大学院数理科学研究科）

*2) 以下，上下にある同じ添字は自動的に和をとるという Einstein の規約を採用する．

可積分系の数学

ソリトンを源流として



鈴木 淳史

1834年のある夏の日，運河にたった孤立波に気付いたScott Russelが馬で追いかけたのがソリトン神話の始まりである[1)]．それから200年近く，ソリトンは数学・物理の両分野に様々な新しい知見をもたらし，その交流の礎となってきた．この小論ではその一端をご紹介したい[*1)]．

1. プロローグ

Scott Russelの発見から百数十年後のある夏の日，海水浴にきて雨に降られ，仕事をしていた戸田により次のようなことが見出された[2)]．N 個の粒子を1次元上に並べ，隣り合う粒子どうしをバネでつなぐ．粒子が全部止まっているときの間隔はバネの自然長に等しいとする．バネのポテンシャルとして次のような非線形な形を仮定する．

$$\phi(r) = a\mathrm{e}^{-r} + ar.$$

r は自然長からのずれである．n 番目の粒子の座標を q_n，さらに $r_n = q_{n+1} - q_n$ とすると r_n は次の運動方程式を満足する（いま $N \to \infty$ とする）．

$$m\ddot{r}_n = a(2\mathrm{e}^{-r_n} - \mathrm{e}^{-r_{n+1}} - \mathrm{e}^{-r_{n-1}}).$$

*1）本文中で引用している論文の多く，例えばHénon–Heiles, Flaschka, Toda等の論文は実は筆者が修士一年のときに理論系院生の必修ゼミで流体力学のK先生のご指導の下，勉強したものである．四半世紀ぶりに論文の青刷り（！）を取り出して眺めてみると何やらK先生の手の内で25年間遊んでいたような気がする．

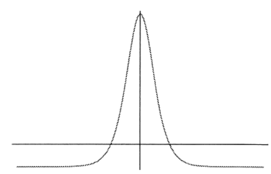


図1　$\tilde{f}(x)$，横軸は波とともに動く座標系にとってある．

ここで簡単のため $m = a$ とし，さら従属変数変換，$f_n = \mathrm{e}^{-r_n} - 1$ を行う．$\tilde{f}(ct - n) := f_n(t)$ の例を図1にあげておこう．これより非線形バネで結ばれた格子（**戸田格子**）はソリトン的な解をもつことがわかる．さらに $f_n = \frac{d^2}{dt^2} \ln \tau_n$ で従属変数を τ_n にとり適当な積分変数を用いて積分することにより，次の運動方程式に至る．

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln \tau_n = \frac{\tau_{n-1}\tau_{n+1}}{\tau_n^2} - 1. \tag{1}$$

これは標準的な**楕円関数** $\vartheta_3(u)$ の満足する関数等式と適当な変数変換で同一視できる．

$$\nu^2 \frac{d^2}{du^2} \log \vartheta_3(u) = \frac{\vartheta_3(u+\kappa)\vartheta_3(u-\kappa)}{(\vartheta_3(u))^2} - \eta.$$

ただし κ は任意の複素数で ν, η は κ の関数である．

なぜソリトン方程式は楕円関数を知っていたのだろう？

2. 可積分と非可積分

上の疑問に答える前に，少し力学系一般の話を

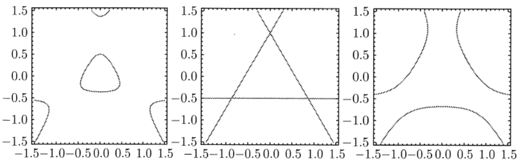


図2 ポテンシャルの等高線．左から $E=\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$.

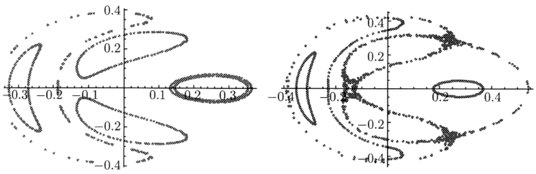


図3 Hénon–Heiles 系の Poincaré 写像．左から $E=\frac{1}{12}$, $\frac{1}{10}$.

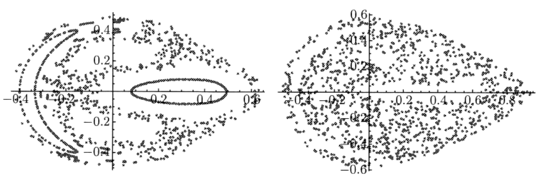


図4 Hénon–Heiles 系の Poincaré 写像．左から $E=\frac{1}{8}$, $\frac{1}{6}$.

しておきたい．

ほとんどすべての運動方程式は解析的に積分できない．そこで数値的に軌道を追跡する必要がある．とはいえ一般に位相空間は高次元であるから，そのまま可視化するわけにはいかない．そこで軌道の断面を調べることになる（**Poincaré 写像**）．よく知られたHénon–Heiles (HH) 系[3]を例にとってみよう．ハミルトニアンは次で与えられる．

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)+q_1^2q_2-\frac{1}{3}q_2^3 \quad (2)$$

運動量 p_1, p_2 をゼロとして $\mathcal{H}=E$ なる等高線を図 2 にあげておく．図からわかるように $E<\frac{1}{6}$ で原点近くからゆっくり動き始めれば，原点近傍付近で周期的な運動をするはずであり $E>\frac{1}{6}$ では運動は双曲的となるだろう．そこで運動方程式を Runge–Kutta 法で解き，$q_1=0$ の面を $p_1>0$ で横切るときの (q_2, p_2) をプロットしてみる．

E が小さいときには図 3 のように**トーラス**（周期的運動）が見えている．さらに E を大きくすると図 4 左のようにトーラスが崩壊し，**カオス**が

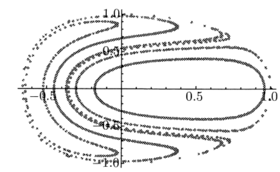


図5 3体の戸田格子模型の Poincaré 写像．$E=\frac{1}{2}$.

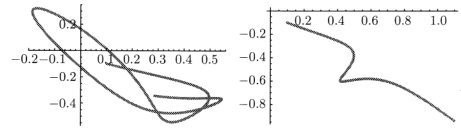


図6 HH' 系での (q_1, q_2) 平面での軌道．$E=\frac{1}{11}$ で両方とも，$(q_1, q_2)=(0.1, -0.1)$ から出発する．左は周期的で右は発散する．

出現する．しばらくはカオス的な領域と（KAM）トーラスが共存するが $E\sim\frac{1}{6}$ では図 4 右のようにほとんどがカオス的な領域で占められる．

3 体の戸田格子のハミルトニアンは適当な変数変換の後 q_n が小さいとき (2) で近似できる．しかし Poincaré 写像の結果は全く異なる．$E=\frac{1}{2}$ での写像を図 5 にあげておこう．トーラスが崩壊せずにいることが見て取れる．このトーラスの存在こそ楕円関数の現れる由縁である．

このように Poincaré 写像は，可積分・非可積分性の簡便なふるいとなる．しかし何事も妄信は危険である．小さい E しか調べなければ，HH 系は可積分であると結論するだろう．逆もあり得る．例えば (2) で最後の係数の符号を変えて $+\frac{1}{3}q_2^3$ としたものを考える（HH' と呼ぼう）．この系のポテンシャルを図示すれば $q_2<0$ の方向に下る坂となる．よって普通に初期値をとるとそちらへ転がっていき，すぐ発散してしまう．しかしながら，ハミルトン方程式から q_1 を消去することにより q_2 に関する式は可積分な Sawada–Kotera 方程式

$$u_t+15(u^3+uu_{xx})_x+u_{xxxxx}=0$$

の進行波解に関する式に変形できる[5]．2 次元系と見たときにこの方程式の解が意味ある位相空間の体積は小さいので，うまく初期値をとってやらねばすぐに発散してしまうのである．図 6 に $E=\frac{1}{11}$ で少しだけ初速の方向を変えた 2 つの (q_1, q_2) 平

面での軌跡の例をあげる．このようにPoincaré写像は可積分な軌跡も簡単に見落としてしまうこともある．よって可積分・非可積分性の議論には様々な面からの検証が必要である．

以下では戸田格子に話を戻し，可積分系での数学的技法にふれることにしよう．

3. Lax 方程式とモノドロミー行列

ソリトン方程式を取り扱う際，それと同値になる線形方程式（**Lax 方程式**）を考えるのが一つのかぎとなる．戸田格子に対する Lax 方程式は Flaschka[4]によって初めて得られており，N 粒子の系を扱う際，Lax 対は $N \times N$ 行列によって表される．

ここでの議論には，次の 2×2 行列による定式化のほうが便利である[6]．以下，周期的境界条件を仮定する．局所的な L_i と M_i を以下で定義する．

$$L_i = \begin{pmatrix} \lambda - p_i & \mathrm{e}^{q_i} \\ -\mathrm{e}^{-q_i} & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_i = \begin{pmatrix} \lambda & \mathrm{e}^{q_i} \\ -\mathrm{e}^{-q_{i+1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

そこで線形（補助）問題として次を考える．

$$\varPhi_{i-1} = L_i \varPhi_i, \quad \dot{\varPhi}_i = M_i \varPhi_i. \tag{3}$$

これらの両立条件より次を得る．

$$\dot{L}_i = M_{i-1} L_i - L_i M_i. \tag{4}$$

この行列要素を見てみれば，$\dot{\lambda} = 0$（**等スペクトル変形**）の条件の下，戸田格子のハミルトン方程式が再現されていることが確かめられる．

$$\dot{q}_i = p_i, \quad \dot{p}_i = \mathrm{e}^{q_{i-1}-q_i} - \mathrm{e}^{q_i - q_{i+1}}.$$

ここでハミルトニアンは次で与えられる．

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{q_{i+1}-q_i}.$$

モノドロミー行列 $\mathcal{T}(\lambda)$ を次で定める．

$$\mathcal{T}(\lambda) := L_1 L_2 \cdots L_N.$$

L_i の具体形より $\det \mathcal{T}(\lambda) = 1$ である．

(4) より直ちにわかるように

$$\dot{\mathcal{T}}(\lambda) = [M_N, \mathcal{T}(\lambda)]$$

となる．よって $T(\lambda) := \mathrm{tr}\, \mathcal{T}(\lambda)$ とすれば，$T(\lambda)$ は時間に依存しない*2)．すなわち $T(\lambda)$ は保存量 $\{I_k\}$ の母関数である．

$$T(\lambda) = \lambda^N + \sum_{k=1}^{N} \lambda^{N-k} I_{k-1}. \tag{5}$$

容易に確かめられるように最初の数項は次のようになる．

$$I_0 = -P, \quad I_1 = \frac{P^2}{2} - \mathcal{H}, \cdots.$$

ただし $P = \sum_{i=1}^{N} p_i$ である．

モノドロミー行列により $\varPhi_0$ と $\varPhi_N$ は $\varPhi_0 = \mathcal{T}(\lambda)\varPhi_N$ で結びつけられている．特に $\varPhi_0 = \rho \varPhi_N$ を満足する（準）周期的解を考える．ρ は $\mathcal{T}(\lambda)$ の固有値であるから次を満足する．

$$\det\big(\rho - \mathcal{T}(\lambda)\big) = 0.$$

この (ρ, λ) の定める曲線を**スペクトル曲線**と言い，今の場合 $\rho^2 - T(\lambda)\rho + 1 = 0$ となる．変数を $y = \rho - \rho^{-1}$ ととると，スペクトル曲線は $y^2 = R(\lambda) := T(\lambda)^2 - 4$ となる．これが（超）楕円関数の現れる起源となる．

4. r 行列形式・変数分離

既知の古典可積分系には，必ず Lax 行列と r 行列が知られている．今の場合 r 行列は次の 4×4 行列である．

$$r(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\Big(\frac{\sigma^z \otimes \sigma^z + I \otimes I}{2} + \sigma^+ \otimes \sigma^- + \sigma^- \otimes \sigma^+\Big).$$

ただし 2×2 行列 A, B に対して 4×4 行列 $A \otimes B$ を次のように定める．

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B \\ A_{21}B & A_{22}B \end{pmatrix}.$$

*2) $T(\lambda)$ は統計力学の転送行列に対応する．

ここでSklyaninに従って（quadratic）**Poisson括弧**の構造を入れる．

$$\{\mathcal{T}(\lambda) \underset{,}{\otimes} \mathcal{T}(\mu)\} = [r(\lambda-\mu), \mathcal{T}(\lambda) \otimes \mathcal{T}(\mu)]. \quad (6)$$

ただし e_{ab} を行列要素として

$$\{\mathcal{T}(\lambda) \underset{,}{\otimes} \mathcal{T}(\mu)\} = \sum_{\substack{a,b,c,\\ d=1,2}} \{\mathcal{T}_{ab}(\lambda), \mathcal{T}_{cd}(\mu)\} e_{ab} \otimes e_{cd}$$

と定義する．$\mathcal{T}(\lambda)$ を具体的に次のようにおく．

$$\mathcal{T}(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

式(7)を(6)に代入することにより，$A(\lambda) \sim D(\lambda)$ 間の以下の代数関係式が確かめられる．

$$\{A(\lambda), A(\mu)\} = \{D(\lambda), D(\mu)\} = 0, \quad (8)$$

$$\{A(\lambda), D(\mu)\} = \frac{1}{\lambda-\mu}\big(C(\lambda)B(\mu) - B(\lambda)C(\mu)\big), \quad (9)$$

$$\{A(\lambda), B(\mu)\} = \frac{1}{\lambda-\mu}\big(A(\lambda)B(\mu) - B(\lambda)A(\mu)\big). \quad (10)$$

これらから直ちに次が従う．

- $\{T(\lambda), T(\mu)\} = 0$．これは T が保存量の母関数であるからもっともである．
- 上の括弧は正準共役の関係，$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ とコンシステントである．

さらにSklyaninが，先行する仕事の結果[7,8]より見抜いたことは上の $B(\mu)$ の零点，およびそこでの A の値を正準変数にとれる，ということである[6,9)*3)]．具体的に次のようにおく（これ以降 $g = N-1$ と書く）．

$$B(\mu_j) = 0, \quad A(\mu_j) = \mathrm{e}^{\kappa_j}, \quad (1 \le j \le g)$$

定理 1. μ_j と κ_k は正準共役変数である．

$$\{\mu_j, \mu_k\} = \{\kappa_j, \kappa_k\} = 0,$$
$$\{\mu_j, \kappa_k\} = \delta_{jk}.$$

*3) 文献 6) では $C(\lambda)$ の零点をとってきている．

証明には上の(8)–(10)を用いる．

さらに $\mu_N = P, \kappa_N = -q_N$ を含めて，自由度の分だけの正準共役変数が得られる．ただし P 自体が保存量であり自明になってしまうので最後のペアは以下の議論には登場しない．また，$\mathcal{T}$ の行列式は1であったから $D(\mu_j) = \mathrm{e}^{-\kappa_j}$ であることにも注意しておく．

解析力学で標準的である**Hamilton–Jacobiの方法**によると作用 S' に対して次が成立する[10)]．

$$\kappa_j = \frac{\partial S'}{\partial \mu_j}, \quad (1 \le j \le g)$$

さらに**変数分離**の考え方に従い $S'=\sum_{j=1}^{g} S_j(\mu_j)$ を仮定するとスペクトル曲線の式から次の常微分方程式を得る[11)]．

$$\kappa_j = \frac{dS_j}{d\mu_j} = \ln \frac{T(\mu_j) + \sqrt{R(\mu_j)}}{2}.$$

すなわち作用は次のように表される．

$$S' = \sum_{j=1}^{g} \int_{\mu_0}^{\mu_j} \ln \frac{T(\lambda) + \sqrt{R(\lambda)}}{2} d\lambda.$$

ただし μ_0 は極でない適当な始点とする．ここで (μ_j, κ_j) から**角・作用変数** (θ_k, I_k) への正準変換を考える．作用変数を I_k にとれば，S' を変換の母関数として共役な角変数は次で与えられる．

$$\theta_k = \frac{\partial S'}{\partial I_k}, \quad (1 \le k \le g).$$

(5)の $T(\lambda)$ と I_k との関係を思い出せば，次のように角変数が表される．

$$\theta_k = \sum_{j=1}^{g} \int_{\mu_0}^{\mu_j} \frac{\lambda^{g-k}}{\sqrt{R(\lambda)}} d\lambda = \sum_{j=1}^{g} \int_{\mu_0}^{\mu_j} \sigma_{g-k+1}$$

保存量 $\{I_k\}$ を適当に与えることによりスペクトル曲線 $y^2 = R(\lambda)$ は**Riemann面** γ を定める．特に $1 \le j \le g$ に対して，$(\mu_j, \mathrm{e}^{\kappa_j} - \mathrm{e}^{-\kappa_j})$ は γ 上の点で，σ_k は γ 上の**第一種微分**である．$\{\theta_k\}_{k=1}^{g}$ は γ の**Jacobi多様体**（後述）上の点と見なせ，$\mu_k \to \theta_k$ は**Abel写像**とも呼ばれる．

μ_j の運動方程式を用いれば $\theta_1 = t - t_0$ で残りの θ_k は時間に依存しないことを示すことができる．そこで問題は $\{\mu_j\}$ を既知の $\{\theta_k\}$ で表すこ

と，すなわち **Jacobi の逆問題**を解くことに帰着される．

5. Jacobi の逆問題

$N = 2$ の例を考えよう．この場合 $\mu_1 = p_1$ であり，$0 < \epsilon < 1$ に対して $E = \epsilon^{-2} + \epsilon^2$ とパラメタライズして $a_\pm = \epsilon^{-1} \pm \epsilon$ とおけば $R(\lambda) = (\lambda^2 - a_+^2)(\lambda^2 - a_-^2)$ となる．ただし $P = 0$ とした．上の一般論より θ_1 は次で与えられる．

$$\theta_1 = \int_0^{p_1} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - a_+^2)(\lambda^2 - a_-^2)}}.$$

上の積分の逆変換のために導入されたのが Jacobi の楕円関数であり，p_1 は次で表される．

$$p_1 = a_- \mathrm{sn}\,(a_+ \theta_1, k_1) = a_- \mathrm{sn}\,(a_+ t, k_1).$$

ここで $k_1 = a_-/a_+$ であり，初期条件として $p_1(t = 0) = 0$ とした．時間に関して一度積分して $N = 2$ の解が得られる．

$$\begin{aligned} q_1 &= \ln\left(\frac{\epsilon}{1 - k_1}(\mathrm{dn}(a_2 t, k_1) - k_1 \mathrm{cn}(a_2 t, k_1))\right) \\ &= \ln \frac{\epsilon}{\mathrm{dn}\left(\frac{a_+(1+k_1)}{2} t, k\right)} = \ln \frac{\epsilon}{\mathrm{dn}\left(\frac{t}{\epsilon}, k\right)}. \end{aligned}$$

ここでは初期条件を $q_1(t = 0) = \ln \epsilon$ とし，さらに Landen 変換による新しい母数 $k = \sqrt{1 - \epsilon^4}$ を導入した．楕円関数 ϑ_3 を用いれば次のようにも書き直せる．

$$q_1 = \ln \frac{\vartheta_3\left(\frac{t}{2K(k)\epsilon} + \frac{1}{2}\right)}{\vartheta_3\left(\frac{t}{2K(k)\epsilon}\right)}. \qquad (11)$$

一般に $R(\lambda) = \prod_{j=1}^{2N}(\lambda - \lambda_j)$ に対して Riemann 面 γ 上に経路 $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=1}^g$ を図 7 のように定める．戸田格子の場合 λ_j はすべて実であることが知られている[12)]．

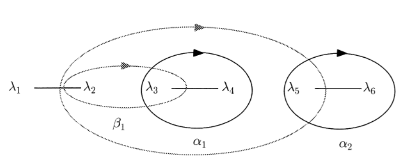


図 7　リーマン面のホモロジー基底の例：$N = 3$.

その上で次の第一種微分の正規基底を導入する．

$$\omega_j = \sum_{k=1}^{g} c_{j,k} \sigma_k, \quad (1 \le j \le g).$$

ただし $c_{j,k}$ は次を満たすように選ぶ．

$$\int_{\alpha_k} \omega_j = \delta_{jk}, \quad (1 \le j, k \le g).$$

さらに $g \times g$ 行列 $\tau = \{\tau_{j,k}\}$ と **Riemann のテータ関数** $\vartheta(\vec{u})$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} \tau_{j,k} &= \int_{\beta_j} \omega_k, \\ \vartheta(\vec{u}) &= \sum_{\vec{m} \in \mathbf{Z}^g} \exp\Big(\pi i^t \vec{m} \tau \vec{m} + 2\pi i \vec{m} \cdot \vec{u}\Big). \end{aligned}$$

このとき γ の Jacobi 多様体は $\mathbf{C}^g/(\mathbf{Z}^g + \tau \mathbf{Z}^g)$ と表される．関数 $\vartheta(\vec{u})$ を用いれば Abel 写像の逆像が得られる．

定理 2. ベクトル $\vec{c}, \vec{c'}$ の j 番目 $(1 \le j \le g)$ の成分をそれぞれ，$c_j = 2\int_{\lambda_{2N}}^{\infty} \omega_j$ および $c'_j = c_{j,g}$ とすると q_n は以下で与えられる．

$$q_n = \bar{P}t - \ln \frac{\vartheta(\vec{c}n + \vec{c'}t + \delta_0)}{\vartheta(\vec{c}(n-1) + \vec{c'}t + \delta_0)}. \qquad (12)$$

導出の詳細に関しては文献 8, 12) に丁寧にまとめられているので参照してほしい[*4)]．

6. 最後に：いくつかのコメント

スペクトル曲線は解析力学，非線形波動に限らず，理論物理の様々な面で重要な役割を果たしている．例えば超対称性をもった場の理論の有効ポテンシャルにその源をもつ Seiberg–Witten 曲線もスペクトル曲線と考えることができる．最近では AdS/CFT 対応にもスペクトル曲線が登場しているようである[14)]．

次に「量子化」についてコメントしよう．$T(\lambda) =$

*4）　$N = 2$ の場合に一般式 (12) が虚数変換の後に (11) に帰着することのチェックは読者への練習問題とする．

$A(\lambda)+D(\lambda)$ において $\lambda=\mu_j$ を代入すると $T(\mu_j)=\mathrm{e}^{\kappa_j}+\mathrm{e}^{-\kappa_j}$ を得る．ここで κ_j は運動量に対応するので，形式的に量子力学の置き換え $\kappa\to -i\hbar\partial_\mu$ を行うと

$$
\begin{aligned}
T(\mu)Q(\mu) &= \mathrm{e}^{i\hbar\partial_\mu}Q(\mu)+\mathrm{e}^{-i\hbar\partial_\mu}Q(\mu)\\
&= Q(\mu+i\hbar)+Q(\mu-i\hbar)
\end{aligned}
$$

を得る．「波動関数」Q に対する上の式は Baxter の $T-Q$ **関係式**と呼ばれ，可解格子模型，共形場理論等，やはり至る所で現れる．ここで $T-Q$ 関係式が現れたのも偶然でなく，模型のレベルから戸田格子の量子化を考えれば，必然的にこの関係式に至ることが文献 13) で示されている．

最後に離散系についてコメントしておきたい．唐突だが，L 個の箱と $M(\le \frac{L}{2})$ 個の玉から成る系を周期的境界条件の下で考える[15]．「隣接した」玉のグループの数を N とする．一つの箱には玉が一つ入っているか，それとも空であるかのいずれかである．時刻 t である箱と玉の配置が与えられるとあるルールに従って「左から右に」[*5] すべての玉を一回動かすことにより $t+1$ の配置がユニークに決まる．一例を図 8 にあげておく．この**箱玉系**が上で議論した周期的な N 体の戸田格子の離散時間，離散従属変数バージョンとなっている．全く非自明なこの同値性が近年の非線形波動研究のキーワードの一つである**超離散化**を用いることにより示されている．

本文で論じた変数分離やスペクトル曲線は，その超離散極限である箱玉系ではどうなっているのだろうか？ これも近年精力的に調べられている．スペクトル曲線はその超離散版である**トロピカル曲線**と呼ばれる piecewise linear な折れ線にとってかわられ[16]，$\{\lambda_i\}$ や作用・角度変数の超離散極限は，ヤング図形によって記述される[15,17]．これらの経緯はとてもこの欄で紹介する余裕がないので，詳細は以前の特集号[18]や最近の解説[19,20]などを参照してほしい．

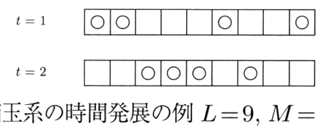


図 8　箱玉系の時間発展の例 $L=9$, $M=4$, $N=2$.

*5)　周期的境界条件なので「右・左」といっても注意が必要である．また「隣接するグループ」についても同様に注意が要る．詳細については文献 15) を参照のこと．

Scott Russel はこんなにも豊かな物理と数学の結びつきを予感してソリトンを追いかけたのだろうか？

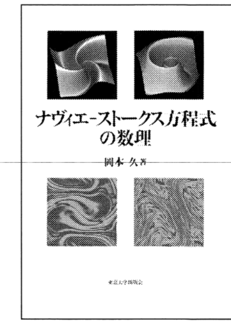
草稿に対して適切なご意見をいただいた井上玲氏に感謝いたします．

参考文献

1)　和達三樹，『非線形波動』（岩波書店，2000）.
2)　戸田盛和，『波動と非線形問題 30 講』（朝倉書店，1995）77 ページ.
3)　M. Hénon and C. Heiles, *The Astronomical Journal* **69** (1964) 73.
4)　H. Flaschka, *Phys. Rev.* **B9** (1974) 1924.
5)　R. Conte, M. Musette and C. Verhoven, *J. Nonlinear Math. Phys.* (2005) 212–227.
6)　E.K. Sklyanin, *Lecture Notes in Phys.* **226** 196 (ed. N. Sanchez, Springer).
7)　H. Flaschka and D.W. McLaughlin, *Prog. Theoret. Phys.* **55** (1976) 438.
8)　田中俊一，伊達悦郎，『KdV 方程式』（紀伊国屋書店，1979）.
9)　E.K. Sklyanin, *Prog. Theoret. Phys.* **118** (1995) 35.
10)　ランダウ・リフシッツ『力学』（東京図書，1986（増訂第 3 版））.
11)　高崎金久，京都大学数理解析研究所講究録 **1648** pp.68–87.
12)　戸田盛和，『非線形格子力学』（岩波書店，1987）および『非線形波動とソリトン』（日本評論社，2000（新版））.
13)　V. Pasquier and M. Gaudin, *J. Phys.* **A25** (1992) 5243–5252.
14)　酒井一博，「数理科学」(2008) 2 月号 p.53–59.
15)　S. Iwao and T. Tokihiro, *J. Phys. A. Math. Theor* **40** (2007) 12987–13021.
16)　R. Inoue and T. Takenawa, “Tropical spectral curves and integrable cellular automata”, arXiv: 0704.2471.
17)　A. Kuniba, T. Takagi and A. Takenouchi, *Nucl Phys.* **B747** (2006) 354–397.
18)　「数理科学」特集「超離散」(1999) 9 月号.
19)　国場敦夫，「数理科学」(2007) 1 月号，p.27–32.
20)　井上玲，「数理科学」(2009) 11 月号，p.18–23.

（すずき・じゅんじ，静岡大学理学部）

ナヴィエ–ストークス方程式の数理



岡本久著，A5 判，384 頁，本体 4800 円，東京大学出版会

極めてユニークな流体力学の「教科書」である．類書は海外にも見当たらない．どういった点がユニークなのであろうか？

本書の特徴は流体力学の基礎方程式であるナヴィエ–ストークス方程式（およびその非粘性極限であるオイラー方程式）の数学的な解説と力学的な記述を併せ持っていることにある．前書きに記されているように，既存の流体力学の多くの教科書が力学的視点から書かれているのに対し，本書は数学的な理論に焦点が合わせられており，その点がまず新しい．章の構成もイントロダクションで数学的準備を行ない，最初に定常問題を，内部問題と外部問題に分けて解説，その後に非定常問題の議論を行なうという形をとっており，これは数学的な理論構築の順番に沿ったものだと言える．

具体的に章の内容を見てみよう．第 1 章でのグロッサリー的な準備に引き続き，第 2 章と第 4 章で定常問題をナヴィエ–ストークス方程式とオイラー方程式に分けて解説している．非定常問題の議論も同様にナヴィエ–ストークス方程式（第 6 章）とオイラー方程式（第 7 章）を別章で展開している．数学的にはナヴィエ–ストークス方程式とオイラー方程式では構造に大きな違いがある．というのも粘性の効果はラプラシアンを通して速度場に作用し，オイラー方程式に対する特異摂動と考えられるからである．このことが流体問題を複雑にし，かつ面白いものにしている．本書は関数空間，不動点定理や弱解など数学的理論に必要な道具立てを初心者にも理解できるように噛み砕いて解説しているほか，過去の記念碑的研究から現在の先端的研究，例えばナヴィエ–ストークス方程式の大域解の存在に関するクレイ研究所のミレニアム問題のポイントにおけるまで，が網羅されており，数理流体力学の全体像をつかむには打ってつけの教科書であると言えよう．しかしながら本書の真骨頂は，むしろ一般論に引き続いての具体例の解説にあると思う．第 3 章ではナヴィエ–ストークス方程式のいくつかの重要な定常解が紹介されており，また第 5 章では無限次元力学系の分岐問題の例としてコルモゴロフ流が取り上げられている．これらの考察は著者が長年に渡って入念に研究してきた内容であり，数値計算の結果も含めて精緻な内容が力強く解説されている．こういった定常解は既存の流体力学の教科書でも触れられているが，本書ではそれらに潜む数学的な興味が掘り下げられており，新鮮で説得力がある内容となっている．数値実験の結果が読者の理解を大いに助け，想像力を喚起してくれることも見逃せないであろう．

本書のもう一つの特徴は巻末に挙げられている 500 を越える豊富な参考文献にある．全体を通しての本書のスタイルは，一般論を一様に説明するのではなく，直感的に理解しやすい題材を選び，話の流れを大づかみにできるようにしていることにある．重要な定理であっても主題から外れる場合には参考文献に証明や解説を委ねている．それが話のテンポを保ち，メリハリをつけているので，読者は論理の糸を見失うことがない．そういった工夫に参考文献が有効に使われている．

煩雑で未整理の舞台裏はなるべく見せないことをよしとするような数学書が圧倒的に多い中，本書はむしろ好んで問題意識を語りかけ，問題解決への試行錯誤の結果を記すことを厭わない．その語り口は洒脱であり，喩えて言うならば勝手口から優しく家の中に招き入れてくれ，美味しい家庭料理をたっぷりご馳走してくれるかのような心安さがある．これも一つの特徴であると言えよう．

流体力学の研究者は数学，理学，工学の多岐に渡っており，その意味でナヴィエ–ストークス方程式の守備範囲は非常に広い．本書は一度なりとも流体方程式について勉強したり，あるいはそれらで記述される問題に興味を持った人が，その方程式や問題を数学的に見直してみるには大変よい教科書である．流体力学は大変歴史の古い学問である．今一度歴史を踏まえ，原点に戻って数学的な観点からいろいろな問題を見つめ直すことは決して無駄なことではあるまい．本書は今まで気がつかなかった考えるヒントをたくさん提供してくれるであろう．

木 村　芳 文（名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

海老原　直邦

1980年3月号

30年前の本誌3月号の特集は「記憶」であった．目次を見ると，記憶の心理，神経生理，記憶の病理や計算機における記憶の問題など，そのテーマも多彩で，現在でもなお参考とすべき内容が多く含まれていると思われる．その中で筆者が担当したのは，単一音や比較的単純な音の系列（メロディー）の記憶，すなわち「非言語音」の記憶の心的機構について，心理学的な実験データに基づいて種々論じた論文である．



実験心理学の分野では，当時から，認知過程の性質を情報処理という観点から解明する研究が盛んであり，筆者の論文も，非言語音の記憶過程を大きく①感覚レベルでの一時的な聴覚的情報保存，②短期的な聴覚記憶，③長期的な聴覚記憶の3つの情報処理段階に分けて，各段階に保存された聴覚情報の性質を検討したものであった．この論文では，言語材料の記憶との比較が随所でなされているが，言語の処理と非言語音の処理の相違を，（「ハードウェア」としての）大脳の左右半球の機能差と関連づけた考察も行っている．

論文では，音楽の記憶に関連する研究の紹介もあり，個人の経験や好みが音楽の記憶に及ぼす影響についての言及なども多少含まれるが，全体としては，音の記憶メカニズムそのものに限定した記述が中心となっている．すなわち，記憶の機能を「知」の情報処理の側面に限って検討し，「情」や「意」の働きとは無関連に考えを進めて，人の認知機能をコンピュータ類似の情報処理システム，いわば「冷たい認知」のシステムと見なした論述になっている．これは当時の認知研究の全体的傾向の反映だとも言えるだろう．

さて，現在はというと，記憶など認知の働きを，情意システムから分離独立したシステムとしてではなく，感情や動機あるいはパーソナリティや環境条件（状況）との関連性の側面から理解しようとする傾向が強くなってきたようである．言い換えれば，以前に比べて，認知機能と他の心的機能との「関係性」を重視するようになってきている．実験室の中ではなく，社会の中で生きて行動している人間の心的特性をリアルに正しく捉えるためには，認知過程に実質的な影響を及ぼす様々な変数を可能な限り取り入れた，多面的なアプローチが確かに必要であろう．

ポジティブ（ネガティブ）な気分状態のときには，ポジティブ（ネガティブ）な感情価をもつ単語の記憶が促進されるというような「気分（感情）一致効果」が確認されているが，これは，まさに「情」が「知」に作用するよい例であろう．このような認知のことを特に「温かい認知」と呼び，現在，多くの認知研究者が取り組む，ホットな研究テーマになってきている．

（えびはら・なおくに，富山大学人文学部）

リレー連載

現象から方程式を創り出す

第2回 —立式で鍛える論理的思考法—

解析力学における方程式と発想

大貫 義郎

1. はじめに

よく知られた振り子の運動の復習から話を始めよう．ここで振り子とは，一様な重力加速度 g の影響の下で，点 O からの距離 l を一定に保ったまま，鉛直面内を摩擦や抵抗を受けずに運動する質点のことである．このとき質点の運動は次のようにして与えられる．

鉛直面上で，O を原点としてここを通る水平線を x 軸，またこれと点 O で直交し重力加速度の方向を向いた直線を y 軸として，質点 P の座標を (x, y) としよう．このとき仮定により $x^2+y^2=l^2$ となるから，y 軸と OP のなす角を θ とすれば

$$x = l\sin\theta, \quad y = l\cos\theta \qquad (1.1)$$

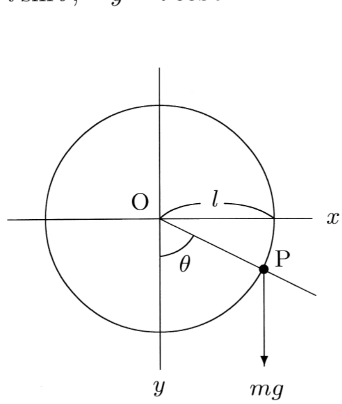


図 1　振り子の運動．

とおくことができる（図 1 参照）．ここで運動を，軌道上の点 P における接線方向とこれと直交する動径方向つまり OP 方向に分けて考えよう．質点（質量 m）には y 軸方向に大きさ mg の重力が加わっており，その接線方向の成分は $-mg\sin\theta$（マイナス符号は θ の増加の方向と逆方向のため），動径方向の成分は $mg\cos\theta$ である．

他方，質点の加速度は接線方向に $l\ddot{\theta}$ であり，また動径方向の加速度はゼロである．後者は，動径の長さが一定に保たれていてこの方向に沿った質点の運動が存在しないことを意味する．つまり動径方向には重力の分力 $mg\cos\theta$ と遠心力 $ml\dot{\theta}^2$ が働いているが，それらをちょうど打ち消すように束縛力が発生して円軌道が実現されていると考えられる．それゆえ θ が時間のどのような関数かが求まれば，この運動についてすべてが分かることになる．そのための方程式は，ニュートン（Newton）の運動の第 2 法則により，加速度の接線成分に質量 m をかけたものを，先に求めたその方向への重力の成分 $-mg\sin\theta$ と等しくおけば与えられる．ここで両辺から m を落とせば結局

$$\ddot{\theta} = -(g/l)\sin\theta \qquad (1.2)$$

となり，これを解いて時間の関数として θ が決定される．

少し急いで述べたが，最低この程度の説明は必要であろう．しかし，もう少し手の込んだ問題になってくると議論も複雑になる．例えば，一様な重力加速度の下での鉛直面内で，質点が曲線 $y=f(x)$ に束縛されているときはどうか．あるいはもっと一般に曲線が $F(x,y)=0$ のときはどのようにして方程式を立てればよいであろうか．それぞれの場合も面倒だが丁寧に分析していけば，運動の第2法則に結びつけて方程式をつくることは不可能ではない．しかしできれば簡単にしかも誤りが入りにくいかたちでやりたいものである．実は，解析力学は例えばこの種の問題をどう扱えばよいかを用意してくれる．

もちろんその結果として方程式がつくれてもそれが解けなければ最終の解決とは言えないであろうが，ここからさらに議論を発展させれば，いろいろな近似法を用いたりあるいは理論の構造を推察して解の振舞いについての手がかりを得ることも期待できる．

ところで「解析力学」という言葉は，ラグランジュ（Lagrange）の『解析的力学（Méchanique Analytique）5巻，1788』あたりに始まるらしい．それまでも，微積分学の成長と相俟って様々な力学の問題が議論されてきたが，それらは問題に固有の幾何学的性質や作図などを頼りに解法をケース・バイ・ケースに工夫することが多かった．しかしラグランジュは彼の著作において，「一定の手続きに基づく代数的な演算だけを要求」して，理論の建設を図ったのである．実はこの流れは現在も続いていると言ってよい．そうして「解析力学」は一般性と普遍性を獲得して自立し，大きな分野をかたちづくるようになった．ときにはまたこの理論は抽象的な色彩を帯びることもあるが，その結果として古典力学ばかりでなく量子力学や相対論などの他分野の開拓にも寄与する力を備えるようになったのである．

しかしこの小論において，その全貌を語るのは難しい．以下ではせめて入り口の部分だけでもやや詳しく述べられればと思っている．

2. ラグランジュ関数

解析力学の主役の一つにラグランジュ関数またはラグランジアンと呼ばれるものがある．

いま，ポテンシャル V を通じて相互作用をする N 個の質点からなる系を考えよう．それぞれの位置ベクトルおよび質量を，$\boldsymbol{r}_a=(x_a,\,y_a,\,z_a)$ および m_a $(a=1,\,2,\,\cdots,\,N)$ とする．ポテンシャル V はもちろん $\boldsymbol{r}_a$ の関数だが，一般には時間 t を陽に含んでいてもよい．それゆえ $V=V(\boldsymbol{r},t)$ と書こう．このとき時間 t の関数としての $\boldsymbol{r}_a$ を決定するのが運動方程式である．それは，ニュートンの第2法則により

$$m_a\ddot{\boldsymbol{r}}_a=-\boldsymbol{\nabla}_aV(\boldsymbol{r},t) \tag{2.1}$$

で与えられる．ただし

$$\boldsymbol{\nabla}_a=(\partial/\partial x_a,\,\partial/\partial y_a,\,\partial/\partial z_a).$$

それでは，位置 $\boldsymbol{r}_a$ が別の変数 $q_j(=q_j(t))$ $(j=1,2,\cdots,n\leqq 3N)$ で書かれている場合はどうであろうか．これを

$$\boldsymbol{r}_a=\boldsymbol{r}_a(q,t) \tag{2.2}$$

と書くことにする．この式は $\boldsymbol{r}_a$ の時間依存が $q_j(t)$ によるもの以外に，陽に t に依存してもよいことを示している．

前節に述べた振り子の運動は，$n=1$ かつ $x=l\sin\theta,\ y=l\cos\theta,\ z=0$ であって，θ が変数 q に対応する．

さて (2.2) の下では，知りたいのは t の関数としての q_j のかたちである．それが分かれば $\boldsymbol{r}_a$ の振舞いは決定する．すなわち q_j の従う方程式が与えられなければならない．解析力学によればそれは次のようにして実行される．

運動のエネルギーの表式

$$T=\sum_a\frac{m_a}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_a^2 \tag{2.3}$$

において，$\dot{\boldsymbol{r}}_a$ に (2.2) を用いたものを $T(q,\dot{q},t)$ と書こう．同様にして $V(\boldsymbol{r},t)$ を $V(q,\,t)$ とする．そうしてこれらを用い系のラグランジュ関数を

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t) \qquad (2.4)$$

で定義しよう．

このとき q_j に対する方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad (2.5)$$

で与えられる．ただし L は $L(q, \dot{q}, t)$ の略記である．(2.5) は**オイラー（Euler）・ラグランジュの方程式**と呼ばれる．

この式は (2.1) を変形して得られる極めて一般的な式であるが，その導出は話が長くなるので行わない．適当な解析力学の本を参照してもらうことにして[1)]，ここでは (2.5) を使った簡単な例題をいくつかやってみよう．

例題 1. 前節の振り子の例では，(1.1) より直ちに

$$\begin{cases} T = \dfrac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \dfrac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2, \\ V = -mgl\cos\theta. \end{cases} \qquad (2.6)$$

よってラグランジュ関数

$$L = T - V = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

より，オイラー・ラグランジュの方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml(l\ddot{\theta} + g\sin\theta) = 0. \quad (2.7)$$

すなわち (1.2) を得る．

例題 2. 今度は鉛直面内で質点が曲線 $y = f(x)$ 上に，摩擦や抵抗なしに，束縛されている場合を考えよう．$f'(x) = df(x)/dx$ とすれば $\dot{y} = \dot{x}f'(x)$ であるから，このとき

$$\begin{cases} T = \dfrac{m\dot{x}^2}{2}(1 + f'^2(x)) \\ V = -gmf(x) \end{cases} \qquad (2.8)$$

となり，よってラグランジュ関数 $T - V$ より，x に対するオイラー・ラグランジュの方程式

$$\ddot{x}(1 + f'^2(x)) + \dot{x}^2 f'(x)f''(x) + gf'(x) = 0 \quad (2.9)$$

が導かれる．ただし，全体にかかる m は落とした．(2.9) から $x(t)$ が求まれば，$y = f(x)$ を介して $y(t)$ も決定する．

例題 3. それならもっと一般化して，x と y の関係が $F(x, y) = 0$ の場合はどうであろうか．これを満たすように q を変数として $x = x(q)$, $y = y(q)$ と書かれるならば，これまでの議論を適用して容易にオイラー・ラグランジュの方程式が与えられる．しかしこのような幸運は一般に保証されておらず，そのときには $F(x, y)$ をそのまま使わざるを得ない．例題 1, 2 と同様，一様な重力の下での鉛直面上に運動を考えるとき結果のみを記せば方程式は次のようになる．

$$\begin{cases} \ddot{x} = \lambda\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \\ \ddot{y} = gm + \lambda\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}, \\ F(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (2.10)$$

ここでは x と y に加え，λ という変数がもう 1 個入って式が書かれるが，(2.10) の導出については次節でより広い視点から述べることにしよう．

例題 4. ついでに**見かけの力**について述べておこう．これも幾何学を援用せずに単純な計算で導かれる．

いま，x-y 平面上を何の力も受けずに運動する質点を考えよう．その振舞いは，慣性系で $m\ddot{x} = m\ddot{y} = 0$, $z = 0$ で記述され，x-y 面上に直線軌道を描く．これを z 軸のまわりに一定の角速度 ω で回転している座標系で眺めると，軌道が直線からずれるので，質点はあたかも力を受けているかのように振る舞う．それを具体的にみるために，$t = 0$ で回転系の座標軸が静止系の座標軸と一致するようにとろう．そのとき，時刻 t では回転系での質点の位置 $(x', y', 0)$ は，静止系での位置 $(x, y, 0)$ と

$$\begin{cases} x = x'\cos\omega t - y'\sin\omega t, \\ y = x'\sin\omega t + y'\cos\omega t \end{cases} \qquad (2.11)$$

なる関係で結ばれる．そこでこれをラグランジュ

関数 $L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$ に代入すれば

$$L=\frac{m}{2}\{(\dot{x}'^2+\dot{y}'^2)+\omega^2(x'^2+y'^2)+2\omega(x'\dot{y}'-y'\dot{x}')\} \tag{2.12}$$

が得られる．それゆえ，回転系におけるオイラー・ラグランジュの方程式は，(2.12) より

$$\begin{cases} m\ddot{x}'=m\omega^2x'+2m\omega\dot{y}', \\ m\ddot{y}'=m\omega^2y'-2m\omega\dot{y}' \end{cases} \tag{2.13}$$

となる．ここで $\boldsymbol{r}'=(x',\, y',\, 0)$ かつ $\boldsymbol{n}$ を z 軸方向を向いた単位ベクトルとすれば (2.13) は，また

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}'=m\omega^2\boldsymbol{r}'+2m\omega(\dot{\boldsymbol{r}}'\times\boldsymbol{n}) \tag{2.14}$$

と書かれる．右辺第 1 項は**遠心力**，第 2 項は**コリオリ**（Coriolis）**力**と呼ばれ，ともに慣性系には存在しない見かけの力である．

以上，(2.1) から出発して外力がポテンシャル V を媒介とするような場合を述べてきたが，異なるタイプの相互作用，例えば電荷 e をもった質点が電磁場の相互作用の下で運動する場合のラグランジュ関数も知られており，それは

$$L(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)=\frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2+\frac{e}{c}\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)-e\phi(\boldsymbol{r},t) \tag{2.15}$$

で与えられる．ここで $\boldsymbol{r}=(x,\, y,\, z)$ は電荷の位置を示すベクトル，c は光速，また $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\, t)$ および $\phi(\boldsymbol{r},t)$ は，それぞれベクトルおよびスカラー・ポテンシャルで，電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ と磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ はこれらを用いて

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\left(\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r},t)\right), \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \end{cases}$$

と書かれる．さて (2.15) を用い，$\boldsymbol{r}$ を変数としてオイラー・ラグランジュの方程式を書き下すと，荷電粒子に対してよく知られた運動方程式

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=e\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\frac{e}{c}\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \tag{2.16}$$

を得る．右辺第 1 項は電場が電荷に及ぼす**電気力**，第 2 項は磁場が電流の及ぼすいわゆる**ローレンツ**（Lorentz）**力**である．

このようにラグランジュ関数という概念が適用できるのはニュートン力学ばかりではない．現在は，量子力学や相対性理論，あるいは場の理論といった幅広い分野において用いられているのである．そうしてラグランジュ関数 $L(q,\dot{q},t)$ が与えられると，オイラー・ラグランジュの方程式 (2.5) が作られて，系の運動が記述されることになるが，その適用範囲は広く，前者が後者を成立させる背景には個々のケースに縛られない普遍的な理由の存在することを予想させる．通常それは**変分原理**あるいは**ハミルトン**（Hamilton）**の原理**と呼ばれている．その概略は次節で述べることにしよう．

3. 変分原理

ラグランジュ関数は，通常の物理量と違って，その値そのものには全く意味がない．そうして $L(q,\dot{q},t)$ を記述する $q_j(t)$ は，運動方程式に拘束されない（2 階微分可能な）t の関数である．そうしてこのような $q_j(t)$ の中から運動方程式をみたすものを選び出すのが変分原理である．

いま任意に時刻 t_1, t_2 をとり，次の積分 $S_{t_{12}}$ を**作用**と呼ぶ．ここで t_{12} は t_1 から t_2 までの積分領域を示す．

$$S_{t_{12}}=\int_{t_1}^{t_2}dt\,L(q(t),\dot{q}(t),t). \tag{3.1}$$

作用 $S_{t_{12}}$ は，関数 q_j $(j=1,\, 2,\, \cdots,\, n)$ を変数とするの関数，いわゆる汎関数である．ここで t_{12} 上で各 q_j を無限小変化させ，$q_j\to q_j+\delta q_j$ とするとき，対応して $S_{t_{12}}\to S_{t_{12}}+\delta S_{t_{12}}$ なる変化が起きる．このとき変化量 $\delta S_{t_{12}}$ がどのように書かれるかを見てみよう．ただし時間間隔の両端 t_1 と t_2 では q_j を変化させず

$$\delta q_j(t_1)=\delta q_j(t_2)=0 \tag{3.2}$$

とすると，若干の計算の後に次式が得られる．

$$\delta S_{t_{12}}=\sum_j\int_{t_1}^{t_2}dt\Big\{\frac{\partial L}{\partial q_j}(t)\,\delta q_j(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(t)\,\delta\dot{q}_j(t)\Big\}$$

$$= \sum_j \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_j}(t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(t) \right\} \delta q_j(t). \tag{3.3}$$

ここで $\dot{\delta} q_j(t) = \dfrac{d}{dt}\delta q_j(t)$, また

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}(t) = \frac{\partial L(q(t), \dot{q}_j(t), t)}{\partial q_j(t)}$$

であって, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(t)$ も同様に定義される.

このとき, 変分原理は次のように述べることができる.

> $q_j(t)\,(t \in t_{12})$ のみたす運動方程式は
>
> $$\delta S_{t_{12}} = 0 \tag{3.4}$$
>
> によって与えられる.

もし n 個の変数 $q_j(t)$ に何の条件もつけられていなければ, 無限小量 $\delta q_j(t)$ は独立にとれるゆえ, (3.4) は (3.3) 右辺の括弧 $\{\ \}$ の部分がゼロになることを要求する. これはオイラー・ラグランジュの方程式 (2.5) の成立に他ならない.

それなら束縛条件が系に課せられているときはどうか. 一般論は話が長くなるので, 以下ではまず前節の例題 3 と関連してラグランジュ関数および束縛条件が

$$\begin{cases} L = \dfrac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x,\, y), \\ F(x,\, y) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

であるような平面上の運動を考えてみよう. このとき (3.3), (3.4) より時刻 t において

$$\left(m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta x(t) + \left(m\ddot{y} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta y(t) = 0 \tag{3.6}$$

が成り立たねばならない. 他方, $\delta x(t)$ と $\delta y(t)$ は独立ではなく, 束縛条件より導かれる関係

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y(t) = 0 \tag{3.7}$$

に従い, 自由に動かせるのはその一方だけである. そこで (3.6) と (3.7) を用いて $\delta x(t)$, $\delta y(t)$ を消去し, これと条件 $F(x,\, y) = 0$ を連立させれば, 系の運動方程式が導かれることになるが, しかしこのようにして求められた式は, 多自由度の系や束縛条件の数がふえた場合には一般に複雑になり, しかも見通しが悪い. そこで一度クッションを入れて式をつくることにしよう.

(3.7) に λ をかけて (3.6) から引くと

$$\left(m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} - \lambda\frac{\partial F}{\partial x}\right)\delta x(t) + \left(m\ddot{y} + \frac{\partial V}{\partial y} - \lambda\frac{\partial F}{\partial y}\right)\delta y(t) = 0 \tag{3.8}$$

を得る. ここで λ は任意にとれるので

$$m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = \lambda\frac{\partial F}{\partial x} \tag{3.9}$$

とおくと, (3.8) 左辺の $\delta x(t)$ を含む項が落ちる. それゆえ残りの項で $\delta y(t)$ の任意性を考慮すれば, その係数はゼロ, すなわち

$$m\ddot{y} + \frac{\partial V}{\partial y} = \lambda\frac{\partial F}{\partial y} \tag{3.10}$$

が導かれる. いうまでもなく (2.10) の第 1, 2 式は, (3.9) と (3.10) において $V = -gmy$ とした場合である.

(3.9), (3.10) から λ を消去した式は, (3.6) と (3.7) から $\delta x(t)$ と $\delta x(t)$ を消去したものに他ならないが, λ を残したままにしておくと, 一般化が容易であることに加え, (3.9) と (3.10) の右辺は, 曲線 $F(x, y) = 0$ 上に質点を拘束するために生じた束縛力を表していることが分かる.

以上の議論をより一般的に眺めるために, ラグランジュ関数 $L(q, \dot{q}, t)$ に従って運動する系に $h\,(< n)$ 個の束縛条件

$$F_a(q, t) = 0, \quad (\, a = 1,\, 2,\, \cdots,\, h\,) \tag{3.11}$$

が課せられている場合を述べておこう.

上と話を拡張すればよいわけだが, 詳細は省略して結果のみを記せば, 時刻 t における方程式は, (3.9), (3.10) の一般化として次のように書かれる.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{a=1}^{h} \lambda_a \frac{\partial F_a}{\partial q_j}, \qquad (j = 1,\, 2,\, \cdots,\, n). \tag{3.12}$$

したがって，系の記述は (3.12) と (3.11) の計 $(n+h)$ 個の方程式で与えられ，またこれに応じて未知変数の数も q_j, λ_a の $(n+h)$ 個である．

ついでに記すと，上の議論では変分原理は作用 (3.1) に用いられ，そうしてそこに現れる $\delta q_j(t)$ に制限を加えるものとして束縛条件 (3.11) が考慮された．いわばそれぞれは別の役割を担ったが，それらを一つにまとめ，束縛条件も運動方程式の一部と見なして扱うことも可能である．それにはラグランジュ関数を改めて

$$L'(q,\dot{q},\lambda,t) \equiv L(q,\dot{q},t) + \sum_a \lambda_a F_a(q,t) \tag{3.13}$$

とすればよい．ここでは変数は q_j, λ_a である．そうして L' を用い，これらに対するオイラー・ラグランジュの方程式をつくれば，(3.11), (3.12) が導かれることは容易に分かるであろう*1)．

4. おわりに

以上，運動方程式とラグランジュ関数の関係を述べてきた．そうして前者が後者から，イメージや直感に頼ることなく機械的な演算で一貫して導かれることを見てきたわけである．確かにこれはラグランジュ関数の魅力には違いない．

もっとも，ある系の運動方程式が実験によって分かってしまえば，それを導くラグランジュ関数をわざわざ考える必要があるのだろうかという疑問が起きるかも知れない．しかし少し手が込んでくると議論はそれほど単純にはいかず，やはりラグランジュ関数の力が必要になってくる．

本稿を締めくくるに当たり，これについて若干の補足をしておこうと思う．

一つは，方程式を扱いやすいかたちに書き変える必要がある．第2節ではラグランジュ関数に慣れてもらうために簡単な例を扱ったが，変数が2個以上になると，その記述は (2.5) に見られるように時間について2階微分の連立方程式であって，その振舞いは一般に見やすいものではない．そのためにラグランジュ関数を介して，変数 q_j $(j=1,2,\cdots,n)$ に加え新変数

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \tag{4.1}$$

を導入して変数を倍増し，全体を高々1階微分の連立方程式に書き変えるという手法がとられる．この理論は**正準形式**と呼ばれるもので，この段階に入ると議論の整備は一段と進められ，様々な近似法の適用も可能になってくる．

それればかりではない．正準形式は量子力学や場の量子論においても欠かすことができない役割を演じるのである．

もう一つ，ラグランジュ関数の重要性は，対称性とそれに関連した保存則の記述にある[2]．例えば相対論的に不変な理論は，系のラグランジュ関数がローレンツ変換の下でスカラーであることによって保証される．とくに微視的な世界を論じるとき対称性は無視することのできない重要な概念であり，その整合的な議論はほとんどがラグランジュ関数を用いて展開される．もちろんその結果は運動方程式にも反映する．

最後に蛇足かも知れないがリマークを一つ付す．それは，このようなラグランジュ関数とは一体何者かということである．すでに述べたように，ラグランジュ関数は通常の物理量と違ってそれの示す数値そのものに全く意味をもたない．しかも変分原理では，一種の"予定調和"を演出するといった特異な性格をもつ．思うにこれは，背後にそれを可能にする物理的な根拠が隠れて存在することを意味するものであろう．しかし古典物理学の中にはそのような根拠は見あたらない．むしろ問題は量子論の構造と深く関係しているように思われる．

*1)　いうまでもないことだが，今度は (3.11) を束縛条件ではなく運動方程式の一部と見なすので，$L'(q,\dot{q},\lambda,t)$ の中で q_j が (3.11) をみたすとしてはいけない．

参考文献

1)　例えば，大貫義郎：『解析力学』，岩波書店 (1987).
2)　大貫義郎："解析力学からの出発"，数理科学 **41**, No 1 13–20 (2003).

（おおぬき・よしお，名古屋大学名誉教授）



人生200年，ようやく往路の半分

小谷　元子

若いということは不自由で窮屈だ．頑なであった20歳くらいの頃は，かっちりとした理想の形があり，自分がその型に少しでも合わないことが絶望であった．残された時間に限りがあり，自分には何も成し遂げられないという焦りばかりであった．

今はもっと柔軟だ．30年の研究生活を通じて，数理科学の懐は深い，真理は様々な形態で身をひそめ，見出されるのを待っているということを学んだ．どんなものにも面白さはあり，そしてどんな場所でも自分に貢献できることがある，そんな気持ちでいる．

私は今，初学者なのである．何でもできる気持ちになっているのは，勉学の途についたばかりで何も知らないのんきさからくるのだろう．2008年に科学技術振興機構（JST）のCREST（Core Research for Evolutional Science and Technology）研究領域「数学と諸分野の協働によるブレークスルーの探索」に提案した，「離散幾何学から提案する新物質創成と物性発現の解明」というプロジェクト研究に採択され，これまで純粋数学の視点で研究してきた離散幾何解析学を材料科学に応用することになった．せっかくの機会なので，提案した研究だけでなく，長期的な展望で新たな展開や深化の方向を見つけたい．そう思って，具体的な研究を進める傍ら，雑多な勉強を始めている．

勉強は楽しく，研究は苦しい．研究を始めれば，暗闇になすすべもなく座り込み，ともかく出口はないかともがくことになろう．しかし，20歳の頃の偏狭さはなくなったので，絶望ということにはなるまい．出口を一つに求めないからだ．経験によって磨いた鈍感さと，自分を追い詰めないずるさを身につけている．

そうそう，私は200歳まで生きると宣言しているので，まだ人生の4分の1．人生80年の人なら，ちょうど大学1年生くらいなのである．まだまだのんびりとやりたいことに挑戦する時間はあろう．と，斯様に，どんな状況にいても，現実を逃避してでも，好奇心を抑えられず新しいことに挑戦したいしぶとさが研究者の性（さが）なのかもしれない．

1. 人生の20分の2時代（20歳まで）

もし，小学校で身に付けることが社会性であるなら，一言でいえば落ちこぼれだった．ニンジンが食べられず，牛乳が飲めず，お肉がダメで，掃除の時間になってもいつも独り給食を食べていた．本を読むのが好きで，人と話すことが怖いと，いつも本の後ろに隠れていた．給食の時間は拷問だったが，それ以外の時間は想像の世界にひたって幸せだった．子供の頃に読んで，豊かな世界が開か

れているように感じた物語を今読み返してみると，意外にあっけない．すべて自分の空想の中にあったのだろうか．

中学，高校では数学と物理と国語が得意だった．自分で考えた問題を持っては，手当たりしだいに先生に尋ねた．数学以外の先生への質問には，納得のいく回答が得られなかったのに比べ，数学の先生にははぐらかされず対応してもらえ楽しかったのだろう．毎日のように数学の先生に質問をした．当時は分からなかったが，これは数学という学問と他の学問の性質の違いを端的に表している．他の学問では，結局のところ経験や知識へのアクセスがなければ疑問を追求していくことができないのに対し，すべてをゼロから構築していくことができる学問が数学である．知識のない中学生でも自分の考えをきちんと説明でき，また，間違いを指摘されれば納得できた．

ともかく，疑問に思うこと，知りたいことが山のようにあり，また自分の考えを聞いてもらいたかった．当時,「研究者」という職業は知らなかったが，一生調べ物をし，考え，意見をまとめる，そういう仕事につきたいと思っていた．

2. 人生の 20 分の 2 から 20 分の 3 時代（大学生～大学院生の頃）

冒頭にも書いたように大学時代は絶望であった．最先端の研究はあまりにも遠くに見え，到底自分はそこに辿りつくことはできないように感じた．数学をすべての学問の根幹にあるもの，それ以外には自分の人生をかける価値のあるものはないと考え，それなのに数学のほうからは「君は必要ない」と拒まれた気がしていた．数学の世界があまりに美しく見え，その世界に遊ぶことは選ばれた人間の特権と決めつけていた．人間というものはやっかいなものだ．足りなければ，足りるように努めればよい．悩んだり，嘆いている時間で前に進める．なぜ，誰かに諾と言ってもらわないと満足できないのか．

今思えば，私は概念上の研究に憧れていただけで，まだ研究を知らなかった．大学院に入って研究のまねごとを始めると夢中になった．それまで，抽象であった数学の概念が，手で触りなでまわせるような具体に見えてきた．具体に見える世界があれば，もっと知りたいと思う．知りたいことが見つかれば停まることはできない．幸い，修士に入って 1 年目に最初の論文が書けた．

先日，女子大学院生からの「大学に残って研究をしようか，医者になろうか迷っているんです」という悩みを延々 3 時間くらい聞いたところで，思わず「研究は辞められるなら続けられないよ」と言ってしまった．あの朝永振一郎ですら，何も形にできない苦しみの日々を表した「滞独日記」(『量子力学と私』（岩波文庫）所収）の中で,「物理にできるだけの力をつくした，苦しみぬいたことは断言する．（中略）ある人が多くを享け，ある人が少なく享けるのは，神の御心にあるので吾々がどうするというべきものではない（中略）そうなのだ．ここで神様がぼくの肩をたたいて，なげくのではない，それはもう私が決めたのだ，と言ってくれれば，それでなっとくがいきそうなのである」と書いている．自然のベールを剥がし科学理論にするには，見えない仕組みが見えてくるのを待つ苦しい時間がある．見えたかと思うと，手の中をすり抜ける絶望的な思いを何度繰り返しても，真理を知りたいという欲望から人間は逃れることはできない．自分が宇宙の法則に司られているのであれば，自然さ，調和という本能に耳をかすことで，自然の本質を見ることができる，いやむしろそのような調和を感じることで，自分が宇宙の一要素であることを確認する作業だからこそ，取り付かれてしまうのだろう．

大学院では幾何学を専攻した．自然界の現象はすべて「エネルギーを最小にする」ように定まっている．例えば，光は直進するが，それは A 地点から B 地点に移動するエネルギーが，最短経路である「直進」のときに最小になるからである．シャボン玉が丸いのは，与えられた体積を囲む最小面積を与える形が球だからである．自然界に見られる形や現象をこのような「最小作用の原理」で理解する．このような考え方に基づいて，様々な条

件設定の下でのエネルギー最小の形「調和写像」について，解析学を道具として幾何学的視点で調べることが，大学院のときの研究テーマであった．ちょうど「大域解析学」という言葉が聞かれ，幾何学と解析学がお互いに関心を共有することに熱心な雰囲気があった．T. Aubin, “Nonlinear analysis on manifolds. Monge Ampere equations”, Springer (1982) を題材に解析の院生，幾何の院生で自主勉強会をしたこと，Surveys in Geometry “Some Applications of Partial Differential Equations to Problems in Geometry” (J. Kazdan) に参加したことは「皆で勉強する」ことの楽しさを知った貴重な体験であった．

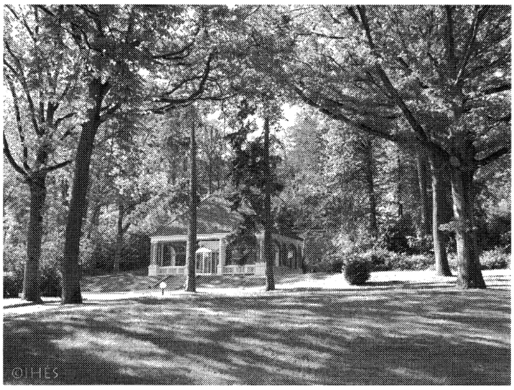
3. 20 分の 3 から 20 分の 4 時代（研究職について）

研究では 3 度大きな飛躍があった．いずれも海外に長期滞在したことと，人との出会いが鍵になっている．数学に限らないだろうが，やはり研究は，没頭する時間がなければ始まらない．幸い，私は 3 度の海外滞在をうまく活用し，研究の展開を図ることができたが，昨今は，多くの研究者がそういう時間を取りにくくなり苦しんでいる．このままで日本の科学技術基盤は大丈夫かという心配が杞憂であれば良いが．海外の主要国にあるような，訪問研究員を主体とする滞在型研究所が日本にあり，サバティカルなどの時期に，同じ興味を持つ様々なバックグランドの人と出会い，研究に集中できる時間を持てるようになればと思う．

修士入学から約 10 年間は部分多様体の観点から調和写像を研究した．自信を持てる研究業績もある程度蓄積でき，海外武者修行のため，ボン（ドイツ）にあるマックスプランク研究所と，カリフォルニア（アメリカ）にある MSRI の訪問研究員 (visiting professor) に応募した．どちらも少数名の常勤教員と中長期滞在の訪問研究者を主体とする，数学では有名な国際研究所である．両方からオファーをもらい，マックスプランク研究所に 1993 年 9 月–1994 年 8 月の 1 年間，MSRI に 1994 年 4 月（極小曲面と調和写像の集中月）の 1 カ月間滞在することに決めた．初めての長期海外滞在ということもあり，自分の研究分野と異なる分野を開拓するチャンスとしたかった．数学的にも自分の研究基盤を固めることができたが，それ以上に，世界各国から来た研究者と知り合い，多様な生き方や考え方を学んだ影響は大きい．知識は人を自由にし，寛大にする．ロシアからたくさんの研究者が海外に出た頃のことで，彼らのダイナミックな数学に出会って興奮した．Kontsevich と Manin の working seminar も懐かしく思い出す．あれもこれもドイツは楽しかった．同時に，自分にとって一番大切なものは何かをじっくり考え，それ以外のすべてを投げ捨てる自由を知った．このときのことは数学セミナー 2006 年 9 月号（通巻 540 号）にも少し書いた．

ドイツ滞在中に調和写像と可積分系の関連で，周期的な構造を持つスペクトル理論に興味をもち，帰国後，砂田利一先生を集中講義に招いた．それをきっかけに力学系や確率論の問題に幾何学的視点を持ち込むことにのめりこんでいった．ブレークスルーはちょうど海外の研究会へ移動中の列車の窓からぼーと外を眺めていたときであった．同僚の確率論の研究者から聞いた問題を考えるともなく考えているうちに，面白い見方に気が付いた．結晶格子上のランダムウォークの長時間挙動に現れる距離が調和写像の観点で説明できるのではないか．少し計算してみると，するするとほぐれていく．この問題に調和写像を使うことを考える人間は他にはいないだろうと思い興奮した．ネガティブな答えが出る前に少し余韻を楽しんでからと惜しむ気持ちもあり，冷静になるまで時間を置いてから細かい議論をつめていった．今まで自分が研究してきた領域ではない未知の分野の結果だったので，研究会から帰ってきてからは，アイデアを確固とした結果にまとめるために，山のように勉強することがあった．この分野の世界的第一人者である砂田先生との共同研究であったため，基礎知識を効率よく学べたことは本当にありがたかった．1999 年に東北大学に異動した．

このときのアイデアを発展させて様々な問題に



IHES.



猿橋賞授賞式にて，米沢冨美子氏と．

挑戦した実りの多い時期であった．岡山大学の勝田篤氏から力学系への応用を助言されたこと，同僚の井関裕靖氏，名古屋大学の納谷信氏，（当時）沼津工専の鎌田博行氏，（当時）静岡大学の芥川和雄氏などとの非可換幾何学の勉強会などを糧に，離散的な図形にこれまでの幾何学や解析学の知識を利用する離散幾何解析学の展開を試みた．幾何学に確率論を応用することで，ランダムな現象に隠れた幾何構造を見出す新興の学問分野である．東北大学に助教授として就任した 2 年目，日本学術振興会特定国派遣研究者として，2001 年 4 月–11 月，2003 年 3 月にパリ郊外にある高等科学研究所（IHES）に滞在した．ゆったりとした時間と無制限での自由が与えられる科学者の楽園での滞在については，パリティ 2008 年 6 月号に書いた．滞在中にこれまで自転車操業でやってきた研究をじっくりまとめ，さらに発展させることができた．廣中平祐氏が理事長を務める数理科学振興会が，谷口シンポジウムに替わる国際研究集会シリーズの第 1 回目のテーマに「離散幾何」を選び，帰国後の 2002 年に第 1 回 JAMS 国際研究集会 Discrete Geometric Analysis を組織委員長として開催した．離散幾何学がこれからの日本に紹介するに相応しい発展する研究分野と期待されたのだと思う．2005 年に「離散幾何解析学による結晶格子の研究」が認められて第 25 回猿橋賞を受賞した．

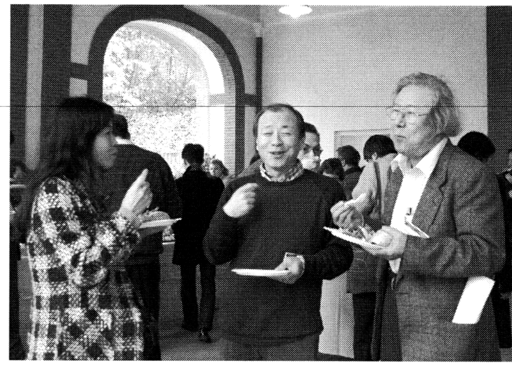
4. 20 分の 4 から 20 分の 5 時代（他分野との連携研究）

『ポストモダン解析学』（シュプリンガー・ジャパン）の中で，著者 J. Jost は「まとまりのある強力な数学理論を展開するには，ある程度の期間は，科学の他分野のみならず，数学の他分野の研究との関連すらを忘れ，内在する問題と構造だけに集中する必要があるように思える．優れた数学の理論だけが備えている知的な優雅さと完璧さのレベルに到達するためには，ほぼ完全に他から孤立することが要請されるのかもしれない．しかしいったんこのレベルに達した後に，再び外的で具体的な問題からのインスピレーションに対して目を開いてみることも有益であろう．」と述べている．これが，まさしく私の CREST 研究をはじめとする，他分野と数学の連携に関わる動機である．

それまで，TV もなく新聞も読まず，数学と数学関係者しか知らない深海魚のような生活を送ってきたが，2006 年頃から学内外の数学以外の研究者と知り合う機会が急激に増えた．それまで対立概念のように考えていた「実験系研究者」の世界を知り，結局のところ，好奇心を追求する研究者は分野を超えて共通点が多いこと，また，日常的な問題解決から，新しい理論体系への熱い期待まで，他分野の研究者が数学の情報を渇望していることを実感し，情報科学研究科の尾畑伸明氏とともに数学をコアとした研究の出会いの場となる「東北大



2007 年に設立された東北大学応用数学フォーラムのポスター．



IHES Noncommutativity にて，廣中平祐氏，前田吉昭氏と．

学応用数学連携フォーラム」を立ち上げた．賛同してくれる数学者のボランティア活動として始めたが，「既存分野を横断的に融合し，異分野の重なり合う領域に新たな研究分野を創出すること」を目的とし 2007 年に設立された東北大学国際高等研究教育機構の正式な活動と 2008 年に認められ，数学出身の専任助教が定期的なワークショップを開催している．質問のための電子掲示板も作ったが，ウェブ上ではなく直接の質問を受けることが多い．他分野とのコミュニケーションにはやはり，実際に顔を合わせる機会が必要であろう．この応用数学連携フォーラムを通じて，数学を超えた人とのつながりが広がり，随分と刺激を受けた．冒頭に書いた CREST「離散幾何学から提案する新物質創成と物性発現の解明」は，この活動から生まれた研究テーマである．

これまで，純粋数学の立場で，離散データ，ランダムなデータの背景にある幾何学的構造を見出す研究を行ってきた．2008 年に第 1 回日本数学会季期研究所国際研究集会 “Probabilistic Approach to Geometry” を京都大学の熊谷隆氏，東京大学の新井仁之氏，ボン大学の K.Th Sturm 氏と開催した．200 名の参加者があったが，幾何学と確率論の交わるところには，純粋数学の立場で追求したい魅力的な問題があふれている．新しい概念や手法も次々と開発され，躍動中の分野である．一方，他分野，とくに実験系の研究者の声を聞くと，現実の現象はあまりに複雑で，膨大なデータの解析に何らかの系統的な視点，新たな理論体系がなければ，もう実験だけではやっていけない限界にきている印象である．階層構造を見出し，スケールごとに段階を追った極限操作を行うことは数学の得意とするところであり，数学の言葉が有効なのではないか．その手法を現実の物質の性質を調べることに使おうというのが，CREST 研究である．微視的には物質とは互いに相互作用している原子の配列である．離散的なプロセスとして記述することができる．この微視的描像をスケール変換することで，我々が観察する巨視的現象が捉えられる．離散的幾何構造から数学を用いて，物質の性質を解明する．既存の数学的知識の応用にとどまらず，数学の新しい手法を開発する楽しみがある．

CREST 数学領域のホームページには「本研究領域は，数学研究者が社会的ニーズの高い課題の解決を目指して，諸分野の研究者と協働し，ブレークスルーの探索を行う研究を対象とするものです」


第 1 回日本数学会季期研究所，2008 京都．

と西浦廉政総括の言葉がある．現実社会の問題は複雑な要素が絡み合い，既存の一科学分野だけでは解決に及ばない．分野を超えて知恵を出し合う必要があるが，そのときの共通言語が数学であると期待されている．

上記，東北大学高等研究教育機構の開設式の大江健三郎の講演「新しい知識人を期待する．領域からも，国籍からも自由な」は印象的だった．1993 年のマックスプランク研究所滞在で，知識は人を国籍から自由にすると感じた．領域から自由な，人類の新しい知識となる学問分野の構築の鍵は何か．「技術」は論理的であり，客観的であり，人に伝授できる．しかし，経験を通して個人の中に積み重なった「技能」は，主観的な，その人の人格とも言えるようなもので，人に伝えることはできない．そのような技能をもった専門家たちが，アマチュアとして集まり議論をすることが領域から自由な研究を産み出すと大江健三郎は主張した．「アマチュアとして」というところがさすがだ．E.W. サイードによると，アマチュア主義とは，「愛好精神と抑えがたい興味によって突き動かされ，より大きな俯瞰図を手に入れたり，境界や障害を乗り越えてさまざまなつながりをつけたり，また特定の専門分野にしばられずに専門職という制限から自由になって観念や価値を追求すること」とある (E.W. サイード，知識人とは何か，大橋洋一訳，平凡社)．

本当に，自分の中で思いがけない発想の飛躍が起こるときというのは，問題を考え続けたのちに自分の中におぼろげな色合いが広がり，その同じ「色合い」を過去の記憶の中でサーチしているような気がする．そのようなわけで，「領域からも自由」になるための勉強をアマチュアとして始めたところである．

200 年の人生の 4 分の 1 は，現役研究者人生の 6 分の 5 にあたる．私は間に合うだろうか．かけらのような小石であってもよい，その上に科学の大殿堂を誰かが築く，そのような礎となる小石を一つ置けたら本望であろう．自分の信じないものに仕えることはもうすまい．

（こたに・もとこ，東北大学大学院理学研究科）

編集後記

今回の特集ではベクトル解析やフーリエ解析などの具体例が扱われています．どれも興味深く抽象的と思われている数学の具体的な使われ方が見えてくるのではないでしょうか．具体的な形が見えているものは現在，研究や教育の現場にいる方だけでなく，初学者にとってもその分野を勉強する上での入門になると思いますので，ぜひ，この特集を入口に先のほうまで進んでいってほしいです．

さて，前月号から新連載「現象から方程式を創り出す」が開始されました．この連載では周囲にある様々な現象から方程式を導き出す（創り出す）過程を紹介できればと考えています．今後の展開にご注目下さい．

また，来月は2007年から毎年4月号として続けている「現代数学はいかに使われているか」シリーズの最終回［確率編］を特集します．確率論の話がどういった分野に応用されているか，あるいは私の興味ある分野ではこういった応用のされ方をしている，といった発見をしていただければ幸いです．　(R)

数　理　科　学　3月号

2010年3月1日発行

数理科学編集部　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　© 株式会社 サイエンス社　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁